Maths - X-ENS PSI 2019

Avertissement : Ce problème est très mal construit et très mal rédigé, pas toujours dans l'esprit du programme de spé mais pourrait faire un sujet intéressant avec un peu de travail pour reprendre l'énoncé.

Notations

Soit $N \geq 2$ un entier. On munit l'espace $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire canonique

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

et de la norme associée $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrée d'ordre N à coefficients réels, $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel réel des matrices symétriques et $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ l'ensemble (des matrices symétriques définies positives) défini de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, x \rangle > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N, x \neq 0 \right\}.$$

Pour tout polynôme $P(X) = c_k X^k + c_{k-1} X^{k-1} + \cdots + c_0 \in \mathbb{R}[X]$ et toute matrice M dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice

$$P(M) = c_k M^k + c_{k-1} M^{k-1} + \cdots + c_0 I_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

où $I_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice identité.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée.

On rappelle le théorème spectral : toute matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ admet une base orthonormale de vecteurs propres. En particulier, si l'on note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_d$ les d valeurs propres de A (distinctes deux à deux), et $F_1, \ldots, F_d$ les sous-espaces propres associés, $\mathbb{R}^N$ est somme directe orthogonales des F_i, c'est-à-dire que tout $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i$$

où p_{F_i} est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^N$ sur F_i.

Ce problème porte sur la résolution effective du problème $Ax = b$, où $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$, plus précisément sur la construction et l'étude, à partir d'un vecteur initial x_0 arbitraire, d'une suite $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ de $\mathbb{R}^N$, qui s'identifie à la solution $\tilde{x}$ du système précédent au-delà d'un certain rang, et telle que x_k se rapproche dans un certain sens de $\tilde{x}$ en deça de ce rang.

Problème

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes réelles strictement positives.

2. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on pose $|||B||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Bx\|$.

   Après avoir justifié l'existence de $|||B|||$, montrer que $B \mapsto |||B|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ vérifiant

   $$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad \|Bx\| \leq |||B||| \, \|x\|.$$

3. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ une matrice de valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Montrer que

   $$|||A||| = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i|.$$

4. Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose $\|x\|_A = \langle x, Ax\rangle^{1/2}$.

   a) Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$.

   b) Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}^N \quad C_1 \|x\| \leq \|x\|_A \leq C_2 \|x\| .$$

5. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et préciser les valeurs propres et vecteurs propres de $P(A)$ en fonction de ceux de A.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. On note $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_d$ les d valeurs propres de A (distinctes deux à deux) et et $F_1, \ldots, F_d$ les sous-espaces propres associés. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$:

   $$x \mapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{1/2} p_{F_i}(x),$$

   où p_{F_i} est la projection orthogonale (pour le produit scalaire canonique) sur F_i. On note $A^{1/2}$ la matrice associée à cette application linéaire dans la base canonique.

   a) On écrit $A = UDU^T$, où $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale qui contient les valeurs propres de A dans l'ordre croissant, avec leurs ordres de multiplicité, et U une matrice orthogonale. On note $D^{1/2}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D. Montrer que $A^{1/2} = UD^{1/2}U^T$.

   b) Montrer que $A^{1/2} \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$, que $A^{1/2}A^{1/2} = A$, et que $A^{1/2}$ commute avec A.

   c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\|_A = \left\|A^{1/2}x\right\|$, où $\|x\|_A$ est la norme définie à la question 4.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. On supposera dans toute la suite du problème que la matrice A n'est pas proportionnelle à l'identité.

On se donne $b \in \mathbb{R}^N$ et l'on note $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$ l'unique vecteur qui vérifie $A\tilde{x} = b$. On se donne un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^N$, différent de $\tilde{x}$, et l'on note $r_0 = b - Ax_0$. On pose $H_0 = \{0\}$ et pour $k \geq 1$,

$$H_k = \{P(A)r_0 \mid P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq k-1\},$$

où $\deg(P) \in \mathbb{N}$ désigne le degré du polynôme P.

7. Montrer que les H_k forment une suite de sous-espaces vecgtoriels de $\mathbb{R}^N$, et montrer que $H_k \subset H_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer qu'il existe nécessairement k tel que $H_{k+1} = H_k$. On note alors m le plus petit entier k tel que $H_{k+1} = H_k$.

   b) Montrer que $\dim(H_k) = m$ pour tout $k \geq m$, et que $\dim(H_k) = k$ pour $k \leq m$.

8. On note d le nombre de valeurs propres distinctes de A.

   a) Dans le cas particulier où r_0 est un vecteur propre de A, montrer que l'entier m de la question précédente est égal à 1.

   b) Dans le cas général, montrer que m est inférieur ou égal à d.

   c) Pour tout entier n entre 1 et d, construire un x_0 tel que l'entier m de la question 7 soit égal à n.

   d) Montrer que l'ensemble des x_0 pour lesquels la dimension m est exactement égale à d est le complémentaire d'une union finie d'ensembles de la forme $\tilde{x} + E$, où E est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $N - 1$.

9. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré m (entier défini dans la question 7) tel que $Q(A)e_0 = 0$, où $e_0 = x_0 - \tilde{x}$.

10. Montrer que le polynôme Q de la question précédente vérifie $Q(0) \neq 0$.

11. On définit $x_0 + H_k$ comme le sous-ensemble des points de $\mathbb{R}^N$ de la forme $x_0 + x$ où x décrit l'espace vectoriel H_k.

a) Montrer que $\tilde{x} \in x_0 + H_m$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, on a $\tilde{x} \notin x_0 + H_k$.

Partie III

On garde dans cette partie les notations de la partie II. On introduit l'application

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle - \langle b, x\rangle . \end{aligned}$$

12. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, exprimer $\|x - \tilde{x}\|_A^2 = \langle x - \tilde{x}, A(x - \tilde{x})\rangle$ en fonction de $J(\tilde{x})$ et de $J(x)$ et en déduire que $\tilde{x}$ est l'unique minimiseur de J sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire que $J(\tilde{x}) \leq J(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, et que $\tilde{x}$ est le seul point qui vérifie cette propriété.

13. Montrer que J admet un minimiseur unique sur le sous-ensemble $x_0 + H_k$ (défini à la question 11), quelque soit $k \in \mathbb{N}$.

14. On note x_k le minimiseur de la question précédente. Montrer que x_k s'identifie à la projection sur $x_0 + H_k$ pour la norme $\|\cdot\|_A$ associée à la matrice A (définie dans la question 4), c'est-à-dire que

$$\|x_k - \tilde{x}\|_A = \min_{x \in x_0 + H_k} \|x - \tilde{x}\|_A .$$

On notera $r_k = b - Ax_k$ et $e_k = x_k - \tilde{x}$. On remarquera que $r_k = -Ae_k$.

15. Montrer que $e_k \neq 0$ pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, et que $e_k = 0$ pour $k \geq m$.

16. On rappelle que I_N est la matrice identité d'ordre N. Montrer que

$$\|e_k\|_A = \min\left\{\|(I_N + AQ(A))e_0\|_A \mid Q \in \mathbb{R}[X], \deg(Q) \leq k-1\right\} .$$

17. Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min\left\{|||I_N + AQ(A)||| \mid Q \in \mathbb{R}[X], \deg(Q) \leq k-1\right\} ,$$

où $|||\cdot|||$ est la norme matricielle définie dans la question 2.
(On pourra utiliser les propriétés sur $A^{1/2}$ démontrées dans la question 6.)

18. On note λ_1 (respectivement λ_N) la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A, et l'on définit

$$\Lambda_k = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(Q) \leq k, Q(0) = 1\} .$$

Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min_{Q \in \Lambda_k} \max_{t \in [\lambda_1, \lambda_N]} |Q(t)|.$$

Les questions qui suivent (de 19 à 23) portent sur la construction explicite d'un polynôme permettant de préciser la majoration précédente.

Soit k un entier positif ou nul.
On définit la fonction f_k de l'intervalle $[-1, 1]$ dans lui-même par $f_k(x) = \cos(k \arccos x)$.

19. a) Développer l'expression $f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)$, et en déduire la relation

$$\forall x \in [-1, 1] \quad f_{k+1}(x) = 2xf_k(x) - f_{k-1}(x).$$

b) En déduire que f_k s'identifie sur $[-1, 1]$ à un polynôme T_k, de degré k, de même parité que k.

20. On note arcosh la fonction réciproque du cosinus hyperbolique[1], définie de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Montrer que

$$\forall x \in]-\infty, -1] \quad T_k(x) = (-1)^k \cosh(k \operatorname{arcosh}(-x)).$$

[1] On n'utilisera de cette notion hors programme que le fait que $\operatorname{arcosh}(1) = 0$, et $\cosh(\operatorname{arcosh}(-x)) = -x$ pour $x \in]-\infty, -1]$.

21. On rappelle que A, par hypothèse énoncée au début de la partie II, n'est pas proportionnelle à l'identité. On pose $\omega_k = \dfrac{1}{T_k\left(-\frac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}\right)}$. Montrer que ω_k est bien défini, que le polynôme

$$Q_k(X) = \omega_k T_k\left(\frac{2X - \lambda_1 - \lambda_N}{\lambda_N - \lambda_1}\right)$$

est élément de Λ_k (ensemble défini à la question 18), et que le maximum de $|Q(t)|$ sur $[\lambda_1, \lambda_N]$ est $|\omega_k|$.

22. On pose $\theta = \operatorname{arcosh}\left(\dfrac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}\right) > 0$ et $\alpha = e^{-\theta}$. Montrer que α est une racine du polynôme

$$X^2 - 2\frac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}X + 1$$

et en déduire l'expression de α en fonction de la quantité $\beta = \dfrac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}$.

23. On note $\kappa = \lambda_N/\lambda_1$. Montrer que le réel α de la question précédente vaut $\alpha = \dfrac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}$ et en déduire que

$$\|e_k\|_A = \|x - \tilde{x}\|_A \leq 2\,\|e_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k.$$

Partie IV

On garde les notations des parties précédentes. En particulier, on note toujours x_k le minimiseur de J sur $x_0 + H_k$ (voir question 13).

24. Montrer qu'il existe une famille $(p_0, \ldots, p_{m-1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ telle que
    (i) Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, la famille $(p_0, \ldots, p_{k-1})$ est une base de H_k.
    (ii) La famille est orthogonale pour le produit scalaire associé à A, c'est-à-dire que

$$\forall i, j \in \{0, \ldots, m-1\} \quad i \neq j \Rightarrow \langle Ap_i, p_j\rangle = 0.$$

25. On suppose connue une famille $(p_0, \ldots, p_{m-1})$ de vecteurs vérifiant les propriétés de la question précédente. Montrer que $x_{k+1} - x_k$ est alors colinéaire à p_k pour tout entier $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.

26. On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^N$. On considère les suites réelles finies (α_k) et (β_k), ainsi que les suites finies $(\tilde{x}_k)$, $(\tilde{r}_k)$ et $(\tilde{p}_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^N$, construites selon les relations de récurrences suivantes, pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\|\tilde{r}_k\|^2}{\langle A\tilde{p}_k, \tilde{p}_k\rangle}, \\
\tilde{x}_{k+1} &= \tilde{x}_k + \alpha_k \tilde{p}_k, \\
\tilde{r}_{k+1} &= \tilde{r}_k - \alpha_k A\tilde{p}_k, \\
\beta_k &= \frac{\|\tilde{r}_{k+1}\|^2}{\|\tilde{r}_k\|^2}, \\
\tilde{p}_{k+1} &= \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k,
\end{aligned}$$

avec $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{r}_0 = b - Ax_0$ et $\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$.

Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$\langle \tilde{r}_i, \tilde{r}_k\rangle = 0,\ \langle \tilde{p}_i, \tilde{r}_k\rangle = 0,\ \langle \tilde{p}_i, A\tilde{p}_k\rangle = 0.$$

(ii) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\tilde{x}_k$ s'identifie à x_k, le minimiseur de J sur $x_0 + H_k$ défini dans la question 13.

(iii) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\tilde{r}_k$ s'identifie à $r_k = A - bx_k$.

(iv) La famille $(\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_k)$ est une base de H_{k+1}, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.