A2019 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH,
CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2019

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, qui pourra être $[0,1]$ ou $[0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire

$$\int_I f(x)dx = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité f est fini si

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)dx.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

I Quelques exemples

1. On considère $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0,+\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.

3. Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?

4. Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.

   On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible.

5. Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.

Dans ce problème, on va s'intéresser à la question suivante : une densité est elle déterminée par l'ensemble de ses moments ? Autrement dit, est-il vrai que

si deux densités f et g ont tous leurs moments finis et
$m_n(f) = m_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $f = g$ sur I ?

On va notamment voir que c'est vrai si $I = [0,1]$ (partie III), mais faux si $I = [0,+\infty[$ (partie V) ou $I = \mathbb{R}$.

II Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial "k parmi n".

6. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

7. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.$$

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.$$

9. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq Cn,$$
pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{2}$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale
$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en
$$X = \left\{ k \in \{0,1,...,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| < \alpha \right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{ k \in \{0,1,...,n\} : \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \alpha \right\}.$$

10. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$,
$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$
où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

11. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que
$$\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

On a donc démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

III Le problème des moments sur $[0,1]$

On considère ici deux densités f et g sur $I=[0,1]$ et on suppose donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_n(f) = m_n(g).$$

12. Montrer que, pour toute fonction polynomiale P, on a

$$\int_0^1 (f(x)-g(x))P(x)dx = 0.$$

On sait par la partie II qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $f-g$ sur $[0,1]$.

13. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x)-g(x))P_n(x)dx = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx.$$

14. Montrer alors que $f=g$ sur $[0,1]$.

IV Transformée de Fourier de la densité gaussienne

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose
$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\varphi(t)dt,$$
où φ est définie en (1).

15. Justifier que $\widehat{\varphi}$ est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.

16. Justifier que $\widehat{\varphi}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$\widehat{\varphi}\,'(\xi) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

17. Montrer que $\widehat{\varphi}$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à préciser.

18. Montrer que $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Dans la suite et si besoin on admettra que ceci reste valable pour tout $\xi \in \mathbb{C}$.

V Le problème des moments sur $[0,+\infty[$

Dans cette partie on considère $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln x)^2} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

19. Montrer que f est bien une densité sur $[0,+\infty[$. On admettra que tous ses moments sont finis.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n f(x) \sin(2\pi \ln x) dx.$$

20. Montrer que

$$I_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)u} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \right),$$

où $\operatorname{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du complexe z.

21. A l'aide de la partie IV, en déduire que $I_n = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$g_\alpha(x) = f(x)(1 + \alpha \sin(2\pi \ln x)).$$

22. Déterminer une infinité non dénombrable de α pour lesquels f et g_α sont deux densités sur $[0,+\infty[$, distinctes et $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fin du problème