CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Objectifs

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions. Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbf{N}}$, une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Partie I - Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t$.

Q2. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de Γ_p et déterminer une relation entre Γ_{p+1} et Γ_p.

Q3. En déduire, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la valeur de Γ_p.

Q4. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(x)$.

Q5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q6. Montrer que g est indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $p \in \mathbf{N}$, $g^{(p)}(x)$.

Q7. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\left|g^{(p)}(0)\right| \geq p^{2p}e^{-p}$.

Q8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$.

La fonction g est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Partie II - Le théorème de Borel

Q9. Déterminer deux nombres complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Q10. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, \psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Q11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbf{N}$, la dérivée p-ième de la fonction φ_1 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Q12. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}$, $\left|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}\right| \leq 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a :

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Pour tout réel α, notons φ_α la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$

Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \mathbf{R}^*$:

$$|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n!a_n^2 x^2}.$$

Q14. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, tout entier $n \geq p$ et tout réel x, on a :

$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q15. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, $u_n^{(p)}(0) = 0$ et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

Q16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel x, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

Q17. En déduire que la fonction $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.

Q18. Montrer que $U(0) = a_0$ et pour tout entier $p \geq 1$, $U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

Q19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p \in \mathbf{N}}$, il existe une fonction f indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = b_p$.

Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIXe siècle.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

- Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. Si $P \in \mathbf{R}[X]$, on notera encore P la fonction polynomiale associée.
- $\mathbf{M}_p(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$. $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{R})$ et $\mathbf{M}_{p,q}(\mathbf{C})$ désignent respectivement les ensembles des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$.
- On note I_p la matrice identité de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ et 0_p la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbf{C})$ ne comportant que des 0.
- On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, c'est-à-dire le polynôme $\det(XI_p - A)$.
- Étant donnée une matrice $M \in \mathbf{M}_p(\mathbf{C})$, on note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de M.

Objectifs

Dans la **partie I**, on détermine les valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. On utilise les résultats démontrés dans la **partie I** pour résoudre, dans la **partie II**, un système différentiel.

Partie I - Éléments propres d'une matrice

I.1 - Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbf{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0_{\mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})}\}$.

Q20. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Q21. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \displaystyle\max_{j \in [\![1, n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

En déduire que :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in [\![1, n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Q22. Justifier que les valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ sont réelles.

Q23. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$

Q24. En utilisant la question **Q23**, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

Q25. Établir, pour $n \geq 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}, \chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
En déduire, pour $n \geq 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

Q26. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$:

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Q27. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right); j \in [\![1,n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1,n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

Q28. Montrer que pour tout vecteur propre $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$, on a :

$$\begin{cases} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 = 0 \\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} = 0, \quad \forall k \in [\![2, n-1]\!] \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n = 0 \end{cases}.$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*,\ u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)\, u_k + u_{k+1} = 0.$$

Q29. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ dont on précisera la dimension.

Q30. Déterminer l'ensemble E des suites $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

Q31. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

Q32. En déduire, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II - Système différentiel

II.1 - Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que C et D commutent.

Q33. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

Q34. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

Q35. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout entier $p \geq p_0$, $D + \dfrac{1}{p} I_n$ est inversible.

Q36. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

Q37. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbf{C}\,;\, \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

Q38. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.

Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu\, x \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2n,1}(\mathbf{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

Q39. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

II.2 - Application à un système différentiel dans le cas où $n = 2$

On considère le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1'' & = & -2x_1 + x_2 \\ x_2'' & = & x_1 - 2x_2 \end{array}\right. . \tag{2}$$

Q40. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que le système (2) soit équivalent au système différentiel du premier ordre $X' = BX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ A_2(\alpha, \beta) & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbf{R})$.

Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de ce système ?

Q41. En utilisant la question **Q37**, déterminer les valeurs propres de B et en déduire que B est diagonalisable.

On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Q42. En utilisant la question **Q38**, déterminer une matrice inversible $P \in \mathbf{M}_4(\mathbf{C})$ dont la première ligne ne comporte que des 1 et telle que $B = PDP^{-1}$.

Q43. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel $Y' = DY$, avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$.

Q44. Déterminer la solution du système différentiel (2) avec conditions intiales $(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) = (1, 0, 0, 0)$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1154 – D'après documents fournis