PSI

SÉRIES NUMÉRIQUES

1) Etudier la nature et calculer la somme des séries de terme général :

a) Pour $n \geqslant 0$, $\quad u_n = \dfrac{9}{(3n+1)(3n+4)}$

b) Pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$

c) Pour $\quad z \in \mathbb{C} \quad$ et $\quad n \geqslant 0$, $\quad u_n = z^{3n}2^{-n}$

d) Pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. $\quad$ On pourra remarquer que : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\, dt.$

2) Quelle est la nature des séries :

a) $\left(\sum \dfrac{\ln n}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ $\qquad$ **b)** $\left(\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ \ln n}\right)_{n\geqslant 2}$

c) $\left(\sum \dfrac{1}{n \ln n}\right)_{n\geqslant 2}$ $\qquad$ **d)** $\left(\sum \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n})\right)_{n\geqslant 1}$

e) $\left(\sum \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})\right)_{n\geqslant 0}$ $\qquad$ **f)** $\left(\sum \dbinom{n}{2} a^{2n}\right)_{n\geqslant 2}$ $\quad$ où $\quad a \in \mathbb{R}$

g) $\left(\sum \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx\right)_{n\geqslant 1}$ $\qquad$ **h)** $\left(\sum \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx\right)_{n\geqslant 1}$

3) Soit $\quad \left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0} \quad$ une série à termes réels positifs.

a) Montrer que si $\quad \left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0} \quad$ converge alors la série $\quad \left(\sum u_n^2\right)_{n\geqslant 0} \quad$ converge.
La réciproque est-elle vraie ?
Le résultat est-il vrai si (u_n) n'est pas à termes positifs ?

b) Montrer que les séries $\quad \left(\sum u_n\right)_{n\geqslant 0} \quad$ et $\quad \left(\sum \ln(1+u_n)\right)_{n\geqslant 0} \quad$ sont de même nature.
Le résultat est-il vrai si (u_n) n'est pas à termes positifs ?

4) Convergence et somme de la série de terme général $\quad w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(n-k)!} \quad$ où $\quad n \geqslant 1$.

5) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
Etudier la nature de la série produit de la série de terme général u_n par elle même.
On pourra utiliser l'inégalité : $\quad \forall\,(a,b) \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{1}{2}(a+b).$

6) Etudier la suite de terme général : $\quad u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \ln n.$

7) On considère la série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$. On note R_n le reste d'ordre n.

a) Trouver un encadrement de R_n.

b) En déduire un équivalent de R_n.

8) On rappelle que $\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $R_n = \mathrm{e} - S_n$.

Montrer, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n+1$, que : $R_n \sim \frac{1}{nn!}$.

9) Etude de la série de terme général a_n défini par : $a_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0, \quad a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) On pose $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

c) Déduire à l'aide de **b)** et du théorème de Césaro la relation : $a_n \sim \frac{2}{n}$.
Conclure.

10) Soit $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$. Etude de la série $\left(\sum \frac{\cos nx}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

a) On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \sum_{p=1}^{k} \cos px$. Calculer C_k.

b) Exprimer, pour $n \geqslant 2$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k}$ à l'aide des C_k, en remarquant que :
$\forall p \geqslant 2, \quad \cos(px) = C_p - C_{p-1}$.

c) Conclure.