PSI

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. A tout élément f de E, on associe la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], \quad g(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\, dt$.

- **a)** Montrer que $T : f \longmapsto g$ est un endomorphisme de E.
- **b)** Calculer, pour tout élément f de E, $(T(f))''$.
- **c)** Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de T.

2) Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \longrightarrow E, \quad P \longmapsto XP' - P$.

- **a)** Vérifier que u est un endomorphisme de E.
- **b)** Déterminer valeurs propres et vecteurs propres de u.

3) Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$. On note pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} I - \lambda BA & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ \lambda A & I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad N(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I - \lambda AB & \lambda A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & B \end{bmatrix}$$

- **a)** Comparer $M(\lambda)$ et $N(\lambda)$.
- **b)** En déduire que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que : $f \circ g - g \circ f = g$.

- **a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f \circ g^k - g^k \circ f = k g^k$.
- **b)** En considérant l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & f \circ h - h \circ f \end{array} \right.$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p = 0$.

5) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

- **a)** Calculer le rang de A.
- **b)** Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que A soit diagonalisable.

6) Soit $n \geqslant 2$ et $A = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par : $m_{ij} = a_i a_j$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Etudier valeurs propres et vecteurs propres de A (en évitant les calculs inutiles).

7) Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$ et $\det A = 1$.
En étudiant χ_A et les valeurs propres de A, montrer que $A^{12} = I_2$.

8) **a)** Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable et donner une matrice de passage P.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $C = \begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{bmatrix}_{2n} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que C est semblable à $\quad C' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}_{2n}$.

c) Montrer que : $\quad A$ diagonalisable $\iff$ C diagonalisable

9) Soit $\quad A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calculer son polynôme caractéristique.

b) Déterminer un polynôme P unitaire et de plus bas degré possible tel que $\quad P(A) = 0$.

c) A est-elle diagonalisable ?

d) Montrer que A est semblable à la matrice $\quad T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par f.

b) f l'endomorphisme canoniquement associé à $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

11) Soit $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Exprimer , pour $p \in \mathbb{N}$, $\quad A^p \quad$ en fonction de I_3, A etA^2.

12) a) Montrer qu'une matrice carrée qui commute avec une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont distincts deux à deux, est une matrice diagonale.

b) Soit $\quad A \in M_n(\mathbb{K}) \quad$ une matrice ayant n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.
Déterminer une base et la dimension de $\quad C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \ / \ AM = MA\}$.

13) Soit $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad M$ est une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $\quad M^2 + AM + I = 0$.

a) Montrer que M est inversible.

b) Montrer que M et A commutent.

c) Montrer que $\quad (X^2 + X + 1)(X^2 + 1) \quad$ est un polynôme annulateur de M.

d) Déterminer M.

14) Soit $\quad A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Montrer que A et T sont semblables.

b) Soient trois réels a, b , c et les suites définies par $\quad u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad w_0 = c \quad$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 8u_n - v_n - 5w_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & 4u_n - v_n - w_n \end{array} \right.$ Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de a, b , c.