CALCUL NUMÉRIQUE

1) **a)** Calculer pour n dans $\mathbb{N}^*$ et a et x dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+kx)$.

En déduire, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\operatorname{sh}(kx)$.

b) Calculer pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(kx)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, calculer $(1-\mathrm{i})^n$ et en déduire la valeur du complexe Z :

$$Z = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{2k}$$

2) On se propose de calculer pour $n \geqslant 1$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

a) En comparant pour $k \in [\![1, n]\!]$, $k\binom{n}{k}$ et $n\binom{n-1}{k-1}$.

b) En utilisant le polynôme $P : x \longmapsto (1+x)^n$.

c) En comparant $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} Card\ A$ et $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} Card\ \bar{A}$ où E désigne un ensemble à n éléments.

3) Soient $n \geqslant 1$ et E un ensemble à n éléments.
Déterminer le nombre de relations binaires sur E, de relations réflexives sur E, de relations symétriques sur E, de relations réflexives et symétriques sur E.
(Pour $n = 4$, on trouve 65536, 4096, 1024, 64)

4) Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2z\cos\varphi + 1 = 0$ où $\varphi \in \mathbb{R}$.

b) $\mathrm{i}\, z^3 + (2\mathrm{i} - 1)z^2 - (\mathrm{i} + 4)z + 3(2\mathrm{i} - 1) = 0$ sachant qu'il y a une racine réelle.

c) $z + \overline{z} + \mathrm{j}(z+1) + 2 = 0$

d) a étant fixé dans $\mathbb{C}^*$: $z^n - naz^{n-1} - \binom{n}{2}a^2 z^{n-2} - \cdots - \binom{n}{k}a^k z^{n-k} - \cdots - a^n = 0$.

e) $n \in \mathbb{N}^*$ et a est un réel tel que $0 < a < \pi$: $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos a$.

5) Linéariser : **a)** $\sin^n(x)$ **b)** $\cos^2(2x)\sin^3(x)$

6) Soit $E = \{z \in \mathbb{C}\ /\ \operatorname{Im}\ z > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C}\ /\ |z| < 1\}$.
Montrer que $f : z \longmapsto \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ définit une bijection de E dans F et calculer f^{-1}.

7) Trouver le lieu $\mathcal{L}$ des points M d'affixe z tels que : $|z| = |z-4|$ et $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(z+1-\mathrm{i})\ [2\pi]$.