MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

Déjà vu précédemment.

4) Action mécanique de la pesanteur

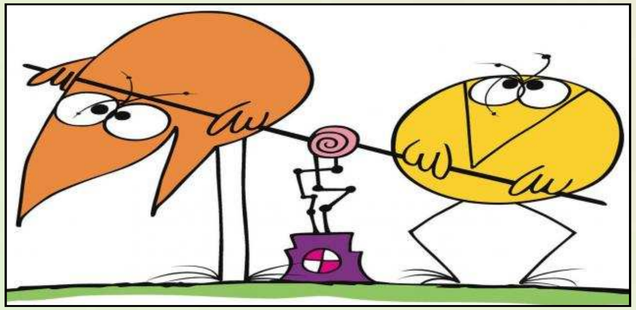
Hypothèses :

- *les solides sont supposés homogènes.*
- *l'accélération de la pesanteur (notée g, exprimée en m/s²) est supposée uniforme, constante et de direction verticale descendante.*

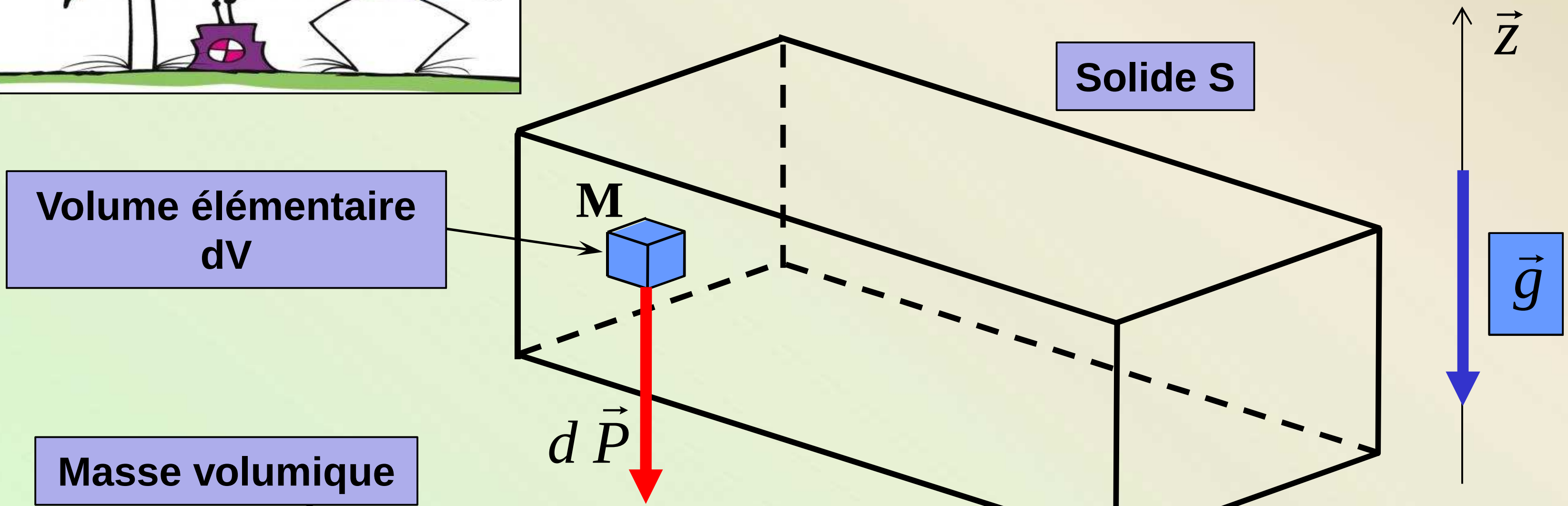
$$g = 9{,}81\ m/s^2 \quad \text{ou} \quad 9{,}8\ m/s^2 \quad \text{ou} \quad 10\ m/s^2$$

Champ de pesanteur : *la pesanteur exerce une action mécanique à distance, elle se manifeste par un champ d'accélération (uniforme et constant).*

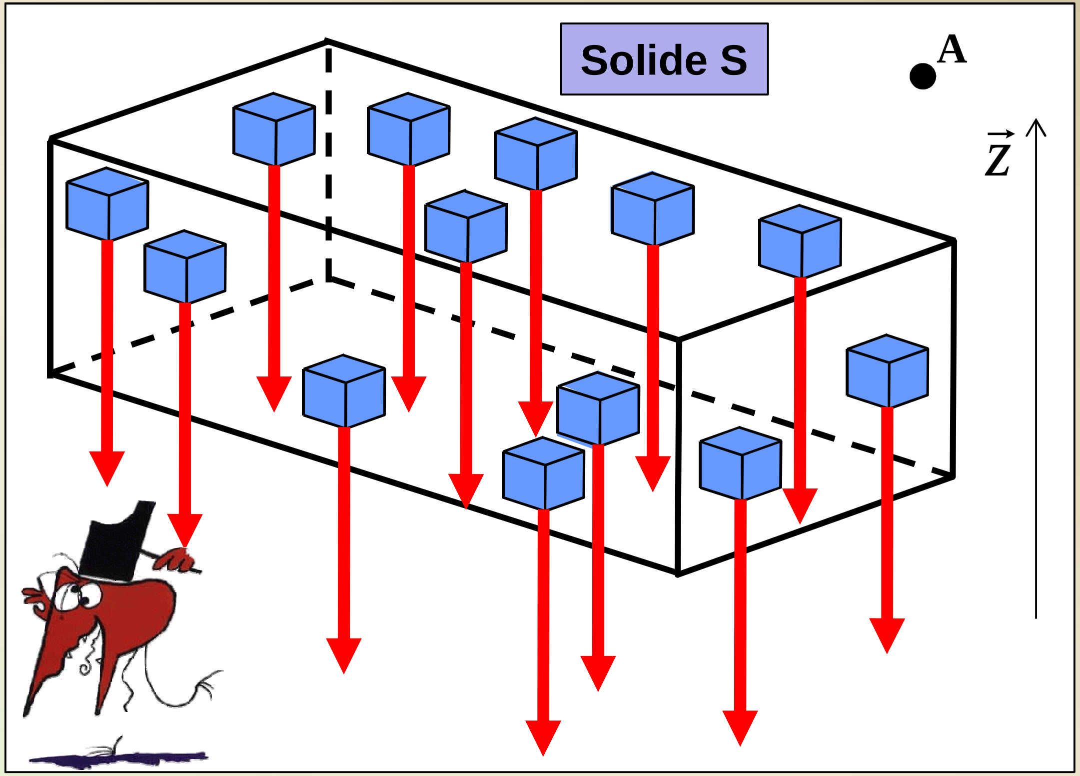
Modèle local : ***le champ de pesanteur produit en tout point M du solide S de volume V une force élémentaire $\overrightarrow{dP}$ appliquée en M et proportionnelle à la masse dm du volume élémentaire dV entourant M.***



$$d\,\vec{P} = dm\,\vec{g}$$



$$d\,\vec{P} = dm\,\vec{g} = \rho \times dV \times g\left(-\vec{z}\right)$$



On a une infinité d'éléments de volume dV :

$$d\,\vec{P} = \rho \times dV \times g\,(-\vec{z})$$

Modèle local.

Force résultante :

$$\overrightarrow{F_{pesanteur \rightarrow solide\ S}} = \vec{P} = \iiint_{Vol} d\,\vec{P} = \iiint_{Vol} \rho \times dv \times g\,(-\vec{z})$$

Modèle global.

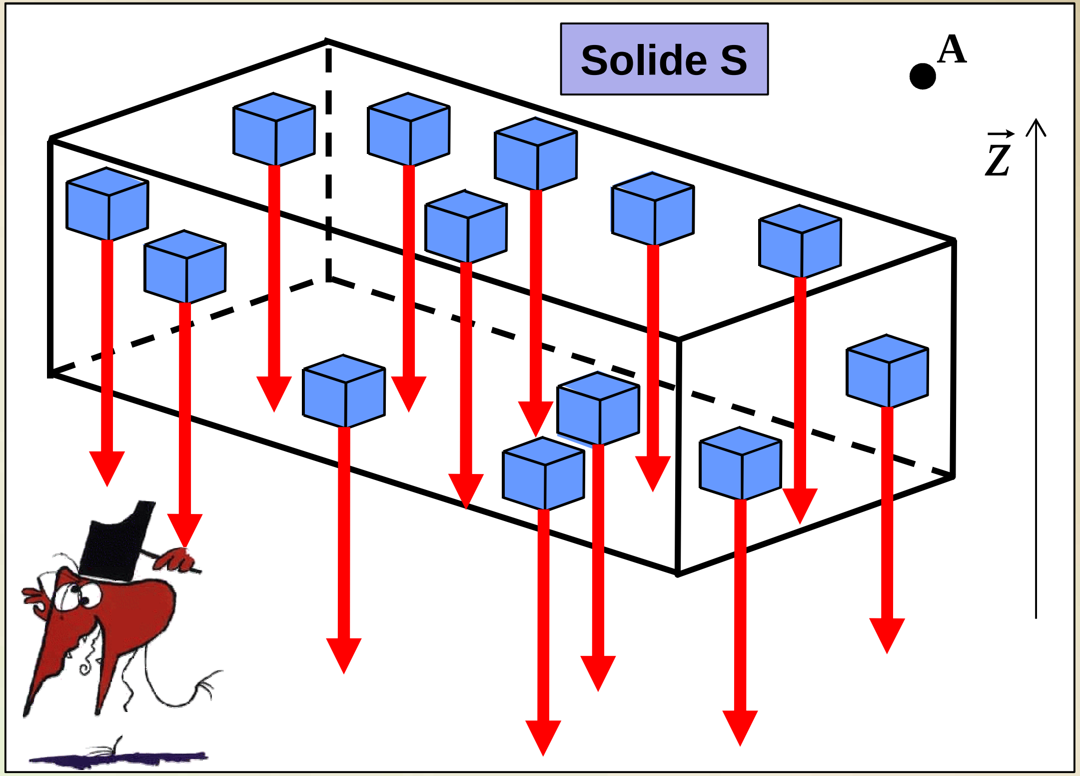
Moment résultant écrit en A (point quelconque) :

$$\overrightarrow{M^{A}_{pesanteur \rightarrow solide\ S}} = \iiint_{Vol} \overrightarrow{AM} \wedge d\,\vec{P} = \iiint_{Vol} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \times dv \times g\,(-\vec{z})$$

On a une infinité d'éléments de volume dV :

$$d\vec{P} = \rho \times dV \times g\left(-\vec{z}\right)$$

Modèle local.

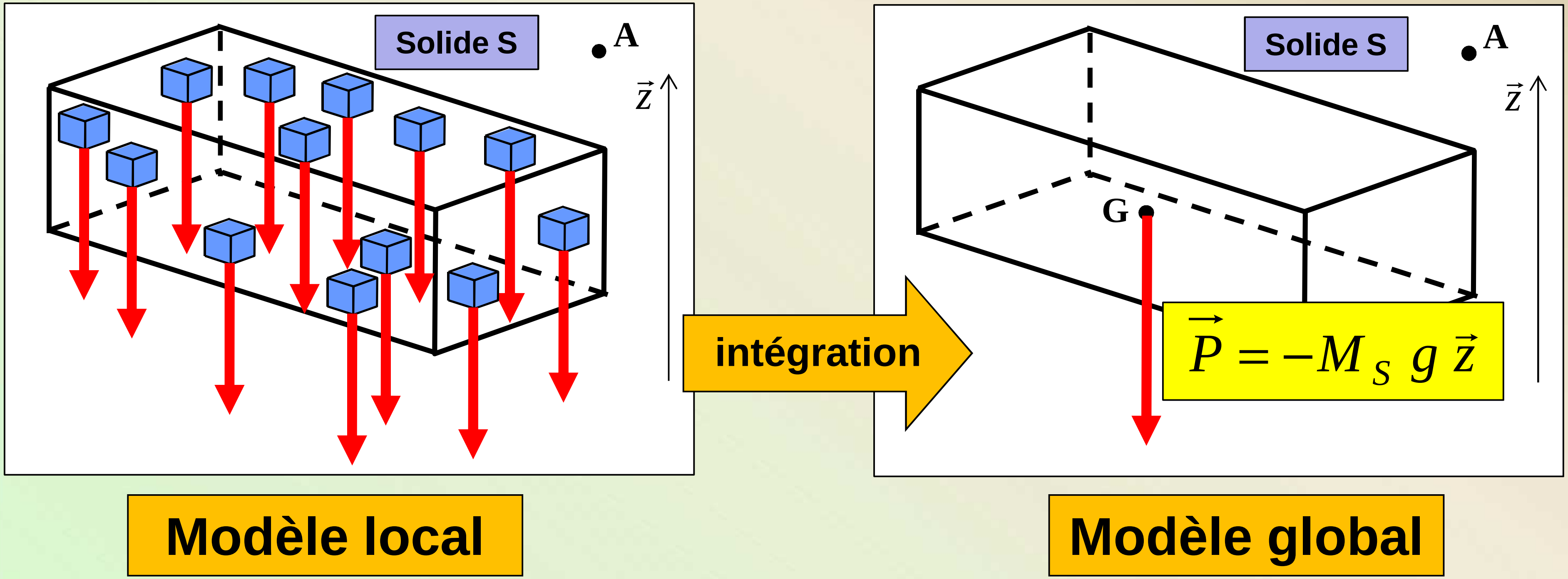


Torseur de l'action mécanique de la pesanteur écrit en A :

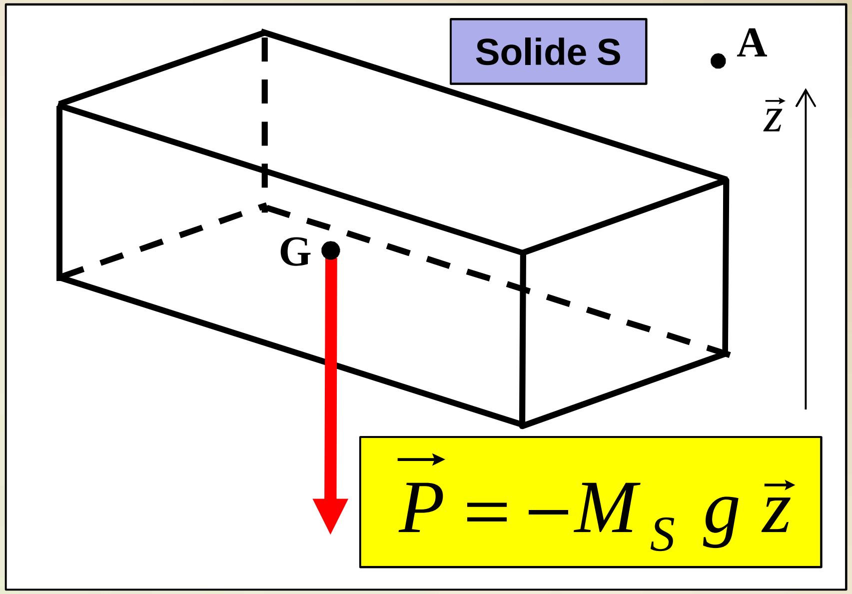
Modèle global.

$$\left\{\mathrm{F}_{pes \to S}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{pes \to S}} \\ \overrightarrow{M^{A}_{pes \to S}} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \iiint_{Vol} \rho \times dv \times g\left(-\vec{z}\right) \\ \iiint_{Vol} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \times dv \times g\left(-\vec{z}\right) \end{matrix}\right\}_A$$

__Modèle global :__ faisons l'intégration de l'ensemble (infini) des actions mécaniques élémentaires agissant sur tout le solide S.



Modèle global

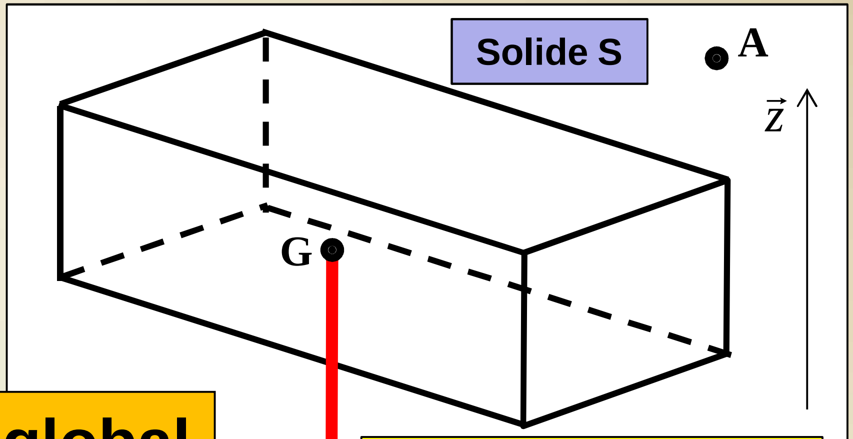


Torseur de l'action mécanique de la pesanteur écrit en A :

Modèle global.

$$\left\{\mathrm{F}_{pes\rightarrow S}\right\}_A = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \vec{P} = -M_S\, g\, \vec{z} \\ \overrightarrow{M^A_{pes \rightarrow S}} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} \end{array}\right\}_A$$

5) Centre de gravité



Modèle global

$$\vec{P} = -M_S \, g \, \vec{z}$$

Il est possible de définir un point particulier (noté G et appelé centre de gravité) tel que :

Modèle global.

$$\left\{ F_{pes \rightarrow S} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow S}} = \vec{P} = -M_S \, g \, \vec{z} \\ \overrightarrow{M^G_{pes \rightarrow S}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

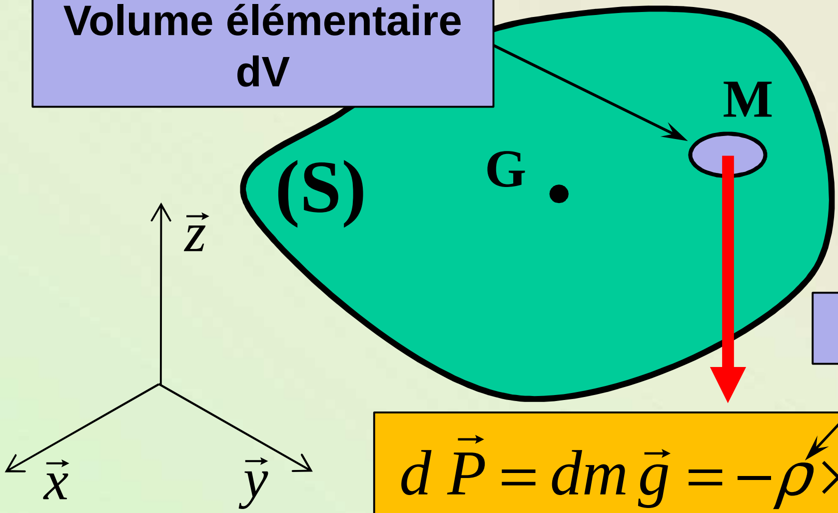
<u>Définition :</u> ***on appelle centre de gravité d'un solide S, le point G (unique et fixe dans S) tel que :***

M : point courant décrivant complètement le solide S

$$\iiint_S \overrightarrow{GM} \times dm = \vec{0}$$

$\rho\, dv$

Volume élémentaire dV



Masse volumique

$$d\,\vec{P} = dm\,\vec{g} = -\rho \times dV \times g\,\vec{z}$$

Densité constante.

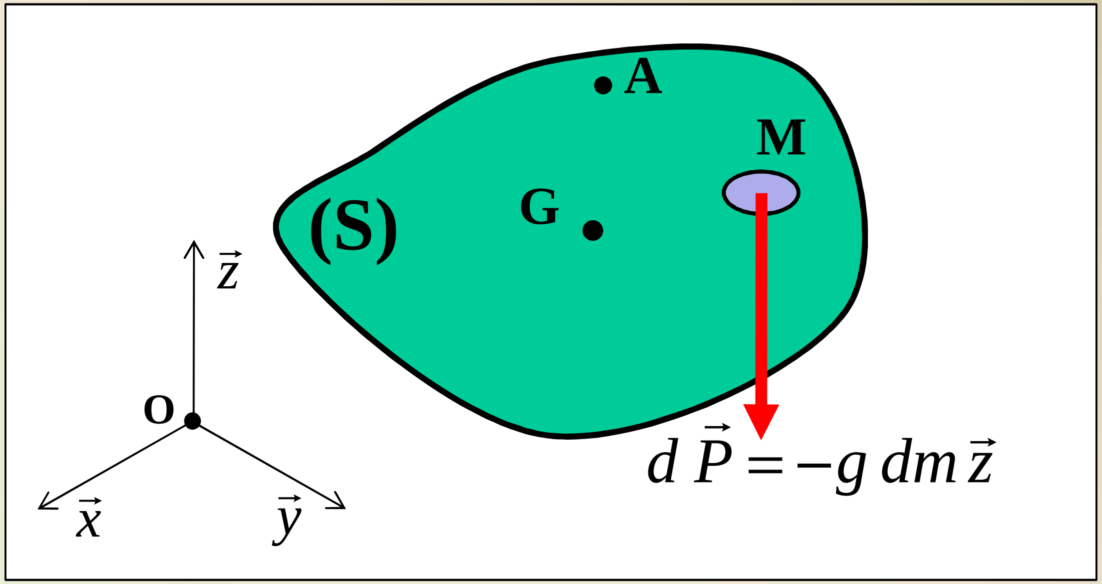
<u>si solide homogène :</u> *centre de masse = centre de volume*

<u>si g est constant :</u> *centre de masse = centre de gravité*

Propriétés :

Symétrie matérielle : ***s'il existe, pour un solide S, un élément de symétrie (plan, axe), d'un point de vue répartition des masses, le centre de gravité G appartient alors à cet élément de symétrie.***

Position : soit un point A quelconque :



$$\iiint_S \overrightarrow{GM} \times dm = \iiint_S \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}\right) \times dm$$

Relation de barycentre.

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA} \times \iiint_S dm + \iiint_S \overrightarrow{AM} \times dm \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\iiint_S \overrightarrow{AM} \times dm}{Ms}$$

M_S

On peut aussi prendre l'origine O du repère

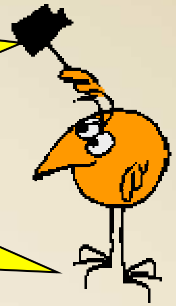
<u>Associativité :</u>* *pour un ensemble de n solides S_i de masse respective m_i et de centre d'inertie G_i, on a :

Relation de barycentre.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_1^n \left(m_i \times \overrightarrow{AG_i}\right)}{\sum_1^n m_i}$$

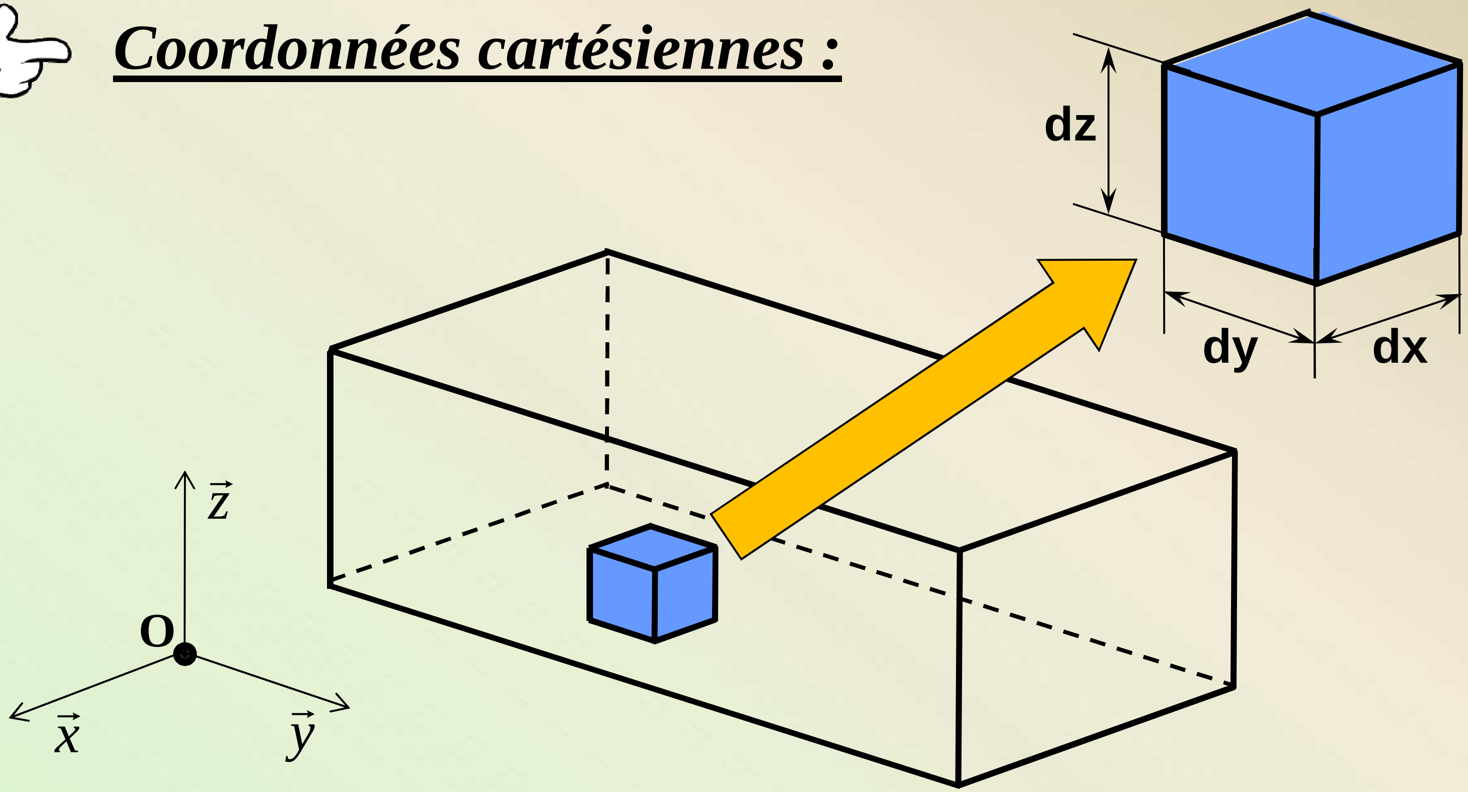
masse totale M_S

On peut aussi prendre l'origine O du repère



Calcul d'intégrales triples :

Coordonnées cartésiennes :



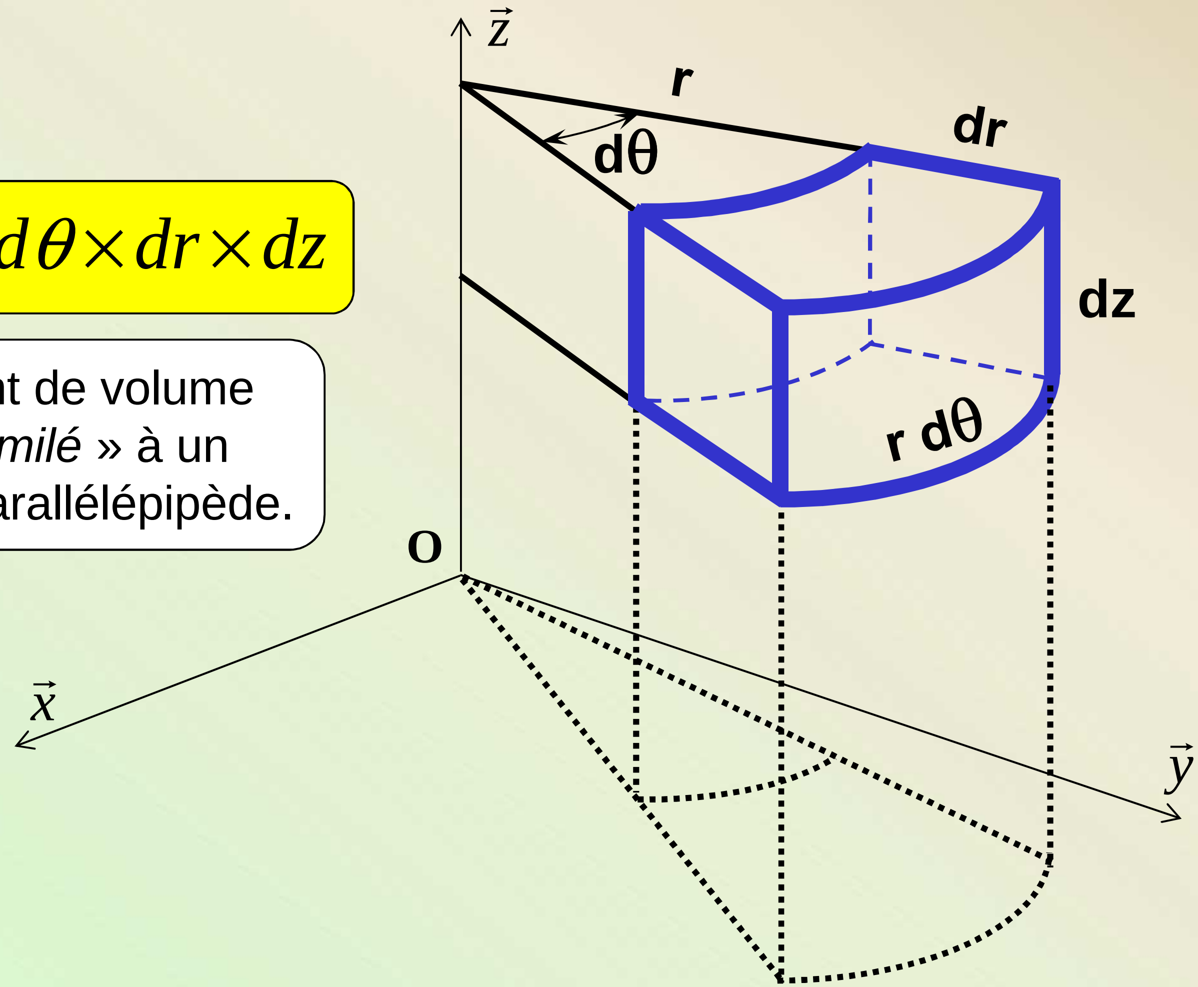
$$dV = dx \times dy \times dz$$

Calcul d'intégrales triples :

Coordonnées cylindriques :

$$dV = r\,d\theta \times dr \times dz$$

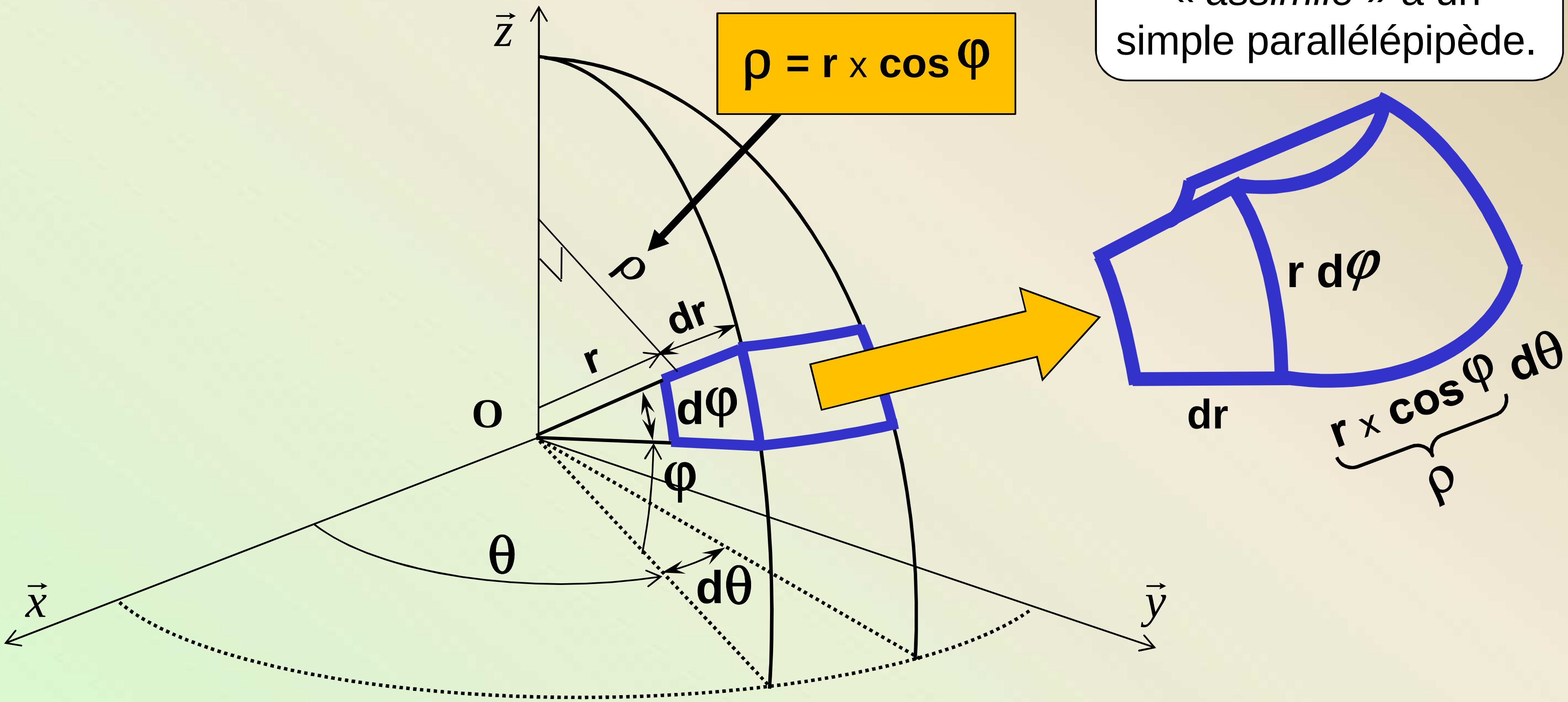
Elément de volume « *assimilé* » à un simple parallélépipède.



Calcul d'intégrales triples :

Coordonnées sphériques :

Elément de volume « *assimilé* » à un simple parallélépipède.



$$dV = r\,d\varphi \times \rho\,d\theta \times dr$$

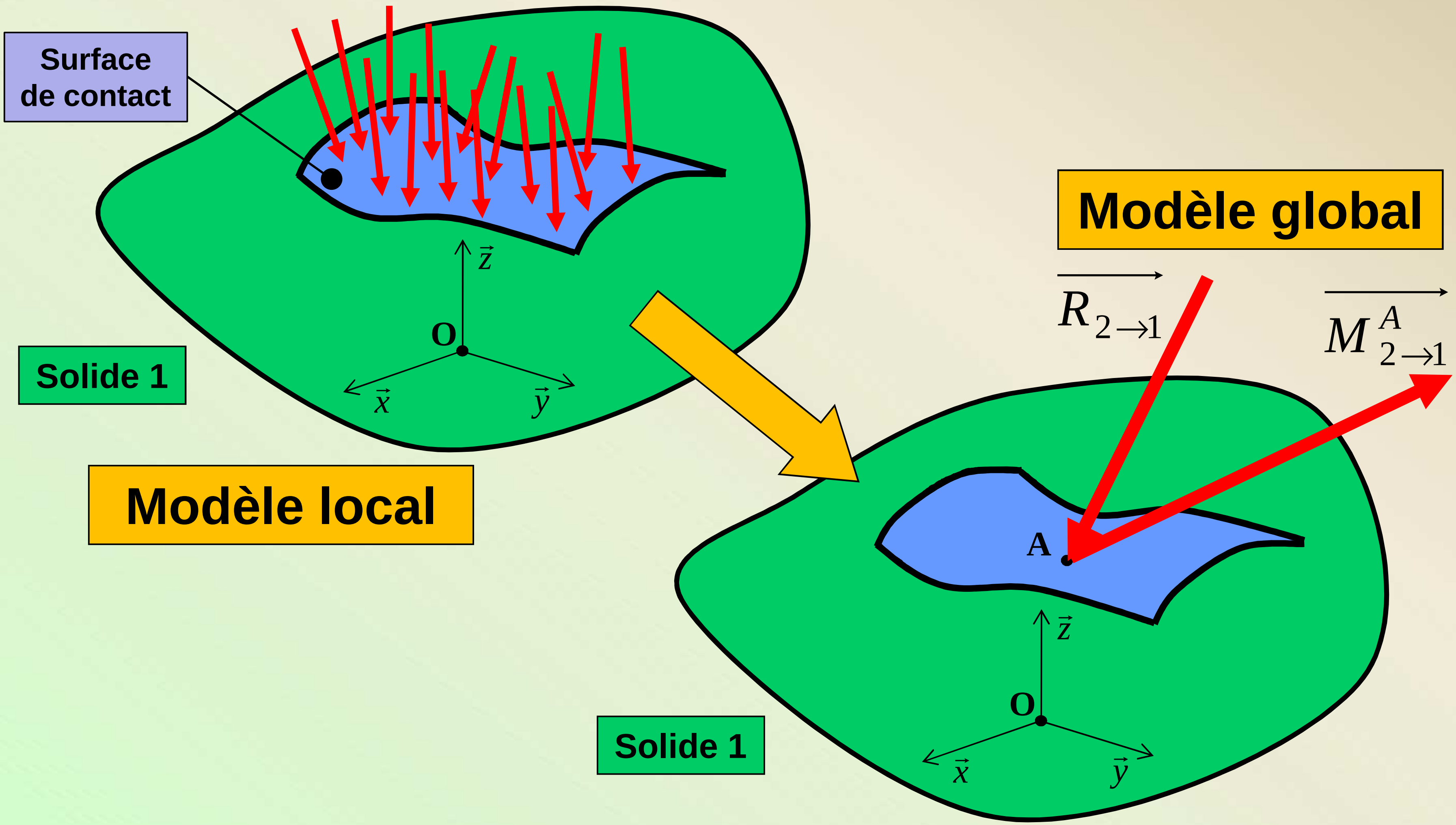
$$dV = r^2 \times \cos\varphi \times d\varphi \times d\theta \times dr$$

6) Action mécanique de contact

Hypothèses :

- ***Le contact est supposé sans frottement.***
- ***La « surface » de contact peut être un point, une ligne (quelconque) ou une surface (plane ou courbe).***

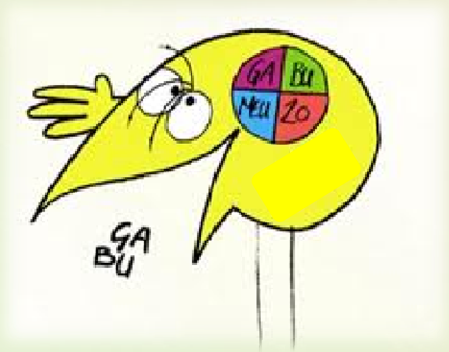
Modélisation locale et globale : ***on suppose isoler un solide 1 et étudier l'action mécanique de contact d'un solide 2 sur ce solide 1.***



Modèle local

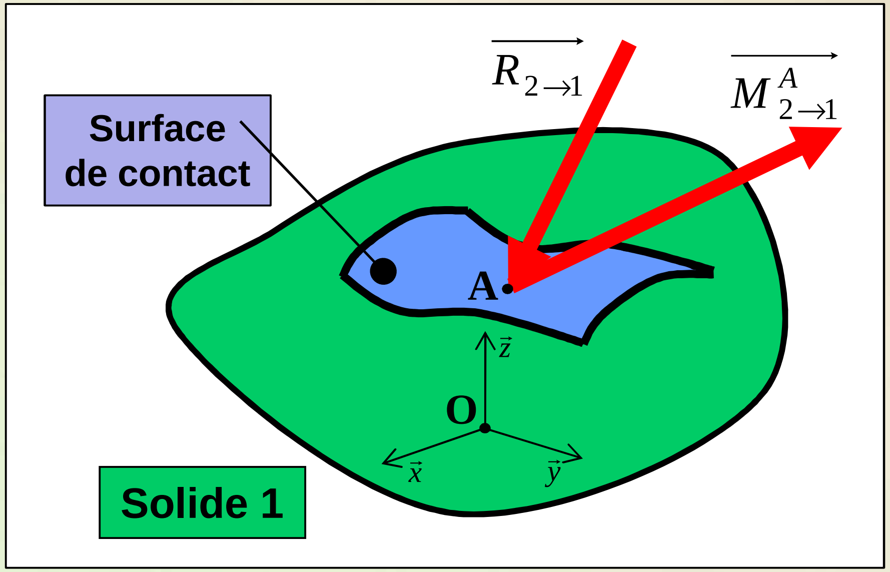
$$\left\{ \mathrm{F}_{2\rightarrow 1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{surf} d\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \\ \iint_{surf} \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \end{array} \right\}_A$$

Point courant de la surface de contact



Modèle global

$$\left\{ \mathrm{F}_{2\rightarrow 1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{2\rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M^{A}_{2\rightarrow 1}} \end{array} \right\}_A$$



Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- Savoir ce que représentent les modélisations locale et globale dans le cadre de la pesanteur.
- Savoir déterminer le centre de gravité en utilisant d'éventuelles symétries ainsi que la relation de barycentre (associativité).
- Savoir intégrer à partir de coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.