PROGRAMME 7

Semaine du 14 au 19 novembre

1) Réduction des endomorphismes : Exercices seulement

2) Intégrales impropres ou généralisées

Les fonctions considérées sont continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Définition :

Si $f \in C_0^m([a,b[,\mathbb{K})$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente lorsque $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{K}$.

Linéarité, relation de Chasles,cas d'un "faux problème " en b (prolongement par continuité).

La nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de f au voisinage de b

Exemples de référence : Intégrales de Riemann.

Calcul d'une intégrale impropre : Changement de variables et intégration par parties.

b) Intégrale de fonctions positives : L'intégrale sur $[a,b[$ converge ssi la primitive est majorée.

Règles usuelles de comparaison.

Cas d'une intégrale nulle. Comparaison série-intégrale :

th. 1 Soit $a\in\mathbb{R}$ et $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ continue par morceaux et positive sur $[a,+\infty[$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, alors :
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si et seulement si la série $\displaystyle\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt\right)$ est convergente.

th. 2 Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}_+$, continue ou continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, positive et décroissante.
La série $\left(\sum f(n)\right)$ converge $\iff \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(t)\,dt$ converge.

c) Absolue convergence et intégrabilité :

f est intégrable ou son intégrale est absolument convergente sur I lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Une intégrale absolument convergente est convergente.

<u>Questions de cours</u> : Liste exhaustive.

- Pour une fonction positive, l'intégrale sur $[a,b[$ converge ssi $\left(x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)dt\right)$ est majorée
- Intégrales de Riemann en $+\infty$ et en $b\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,dt$, $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$.
- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$, divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\,dt$
- Cas d'une intégrale nulle.
- $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$: ensemble de définition et $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

PROGRAMME 8

Semaine du 21 au 26 novembre

1) Intégrales impropres ou généralisées : Voir ci-dessus

2) Suites de fonctions : Les fonctions sont définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple et uniforme : Pour la convergence uniforme les fonctions sont bornées.
Convergence uniforme sur tout segment de I.

b) Propriétés : Continuité de la fonction limite, extension au cas d'une borne de I.
Dérivation, intégration de la limite d'une suite de fonctions.

3) Séries de fonctions : Les fonctions sont définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Convergence uniforme, normale sur I ou sur tout segment de I.
Lien entre les diverses convergence .

b) Propriétés de la somme d'une série de fonctions.

Questions de cours : Liste exhaustive.

- Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$
- $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$: ensemble de définition et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- Différentes convergences de la suite de fonctions $f_n : t \geqslant 0 \longmapsto tn^a\,\mathrm{e}^{-nt}$, $n \geqslant 1$ suivant les valeurs de a.
- Convergence simple, normale et uniforme de la série de fonction sur $\mathbb{R}_+$, $\sum f_n$ où $f_n : t \geqslant 0 \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+t^2}$
- Ensemble de définition, continuité, limite en $+\infty$ de la fonction zeta de Riemann.
  Etude des convergences de la série.