16 / 17 **PROGRAMME 3** **PSI**

Semaine du 3 au 8 octobre

1) Séries réelles et complexes :
Propriétés générales, étude de la série harmonique , des séries téléscopiques, des séries géométriques, de la série exponentielle.
Séries à termes positifs : Théorèmes de comparaison, critère de D'Alembert, comparaison séries-intégrales, séries de Riemann.
Absolue convergence, produit de Cauchy.
Séries alternées : définition, théorème et majoration du reste.

2) Espaces vectoriels :
Révisions : sous espaces vectoriels , applications linéaires, cas de la dimension finie. Théorème du rang.
Somme de p sous espaces vectoriels, décomposition de E en somme directe.
Projections, symétries vectorielles.
Hyperplan en dimension finie, noyau d'une forme linéaire non nulle, équation d'un hyperplan.

3) Polynômes : Division euclidienne, formule de Taylor, somme et produit des racines, polynômes irréductibles.

4) Matrices et déterminants
Matrices d'un système de vecteurs, d'une application linéaire, rang, opérations, transposée, inverse.
Matrices symétriques et antisymétriques, triangulaires.
Changement de bases , matrices semblables, trace d'un endomorphisme

Questions de cours :

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n,$ séries géométriques et calcul du reste en cas de convergence.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\left(\sum (u_{n+1} - u_n)\right)$ converge.
  Application du résultat précédent à la convergence de $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$
- Application du produit de Cauchy à $exp(z + z')$.
- Si la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe, unicité de la décomposition de tout vecteur $\displaystyle x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$.
- H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire f non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$.
- Trace d'une matrice : $Tr(\lambda A + B)$, $Tr(AB) = Tr(BA)$
- Inverse d'une matrice :
  Si les matrices A et B sont inversibles alors AB et ${}^tA$ le sont et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- Si A et B sont deux matrices semblables alors A^k et B^k sont semblables, A^{-1} et B^{-1} sont semblables , quand elles sont inversibles, ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables, A et B ont même rang et même trace.

PROGRAMME 4

<u>Semaine du 10 au 15 octobre</u>

1) Séries numériques : Exercices

2) Espaces vectoriels :
Révisions : sous espaces vectoriels , applications linéaires, cas de la dimension finie. Théorème du rang.
Somme de p sous espaces vectoriels, décomposition de E en somme directe.
Projections, symétries vectorielles.
Hyperplan en dimension finie, noyau d'une forme linéaire non nulle, équation d'un hyperplan.

3) Polynômes : Division euclidienne, formule de Taylor, somme et produit des racines, polynômes irréductibles.

4) Matrices et déterminants
Matrices d'un système de vecteurs, d'une application linéaire, rang, opérations, transposée, inverse.
Matrices symétriques et antisymétriques, triangulaires.
Changement de bases , matrices semblables, trace d'un endomorphisme
Matrices par blocs, polynomes de matrices et d'endomorphismes. Déterminants (révisions)

Questions de cours :

- Si la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe, unicité de la décomposition de tout vecteur $x \in \sum_{i=1}^{p} E_i$.
- H est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire f non nulle telle que $H = \operatorname{Ker} f$.
- Trace d'une matrice : $Tr(\lambda A + B)$, $Tr(AB) = Tr(BA)$
- Inverse d'une matrice :
  Si les matrices A et B sont inversibles alors AB et ${}^tA$ le sont et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
- Si A et B sont deux matrices semblables alors A^k et B^k sont semblables, A^{-1} et B^{-1} sont semblables , quand elles sont inversibles, ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables, A et B ont même rang et même trace.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé et l'application $\varphi_A : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{cases}$ Alors $\operatorname{Ker}(\varphi_A) \neq \{0\}$.
- Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.
- Calcul du déterminant de VanderMonde

<u>Prévisions</u> : Matrices, déterminants, intégrales sur un intervalle quelconque.