Semaine du 12 au 17 décembre

Espaces vectoriels normés

a) Normes normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$, dans $M_n(\mathbb{K})$ et dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$:

$$||f||_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad ||f||_1 = \int_a^b |f(t)|dt, \quad ||f||_2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Norme euclidienne associée à un produit scalaire.
Distances et boules. Parties et applications bornées d'un espace vectoriel normé $(E, ||\ ||)$.
$B(I,E) = \{$fonctions bornées de I dans $E\}$ est un espace vectoriel et
$N_\infty : f \longmapsto sup\{||f(x)|| \ / \ x \in I\}$ définit une norme sur $B(I,E)$.

b) Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finnie : définition, opérations, lien avec les suites coordonnées.

c) Définition des ouverts, des fermés. Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.
Définition des points adhérents, des points intérieurs, de la frontière.
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

d) Fonction d'un espace vectoriel normé dans un autre : Ici les ev sont de **dimension finie**.
Limites : définition, opérations,composée, lien avec les fonctions coordonnées.
Applications lipschitziennes de (E,N) dans (E',N').
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur E tout entier alors l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E ,
l' ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé de E et l' ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) = 0\}$ est un fermé de E.
Continuité des applications linéaires et des applications bilinéaires en dimension finie.

<u>Questions de cours</u> : Liste exhaustive.
- Dans un evn : $\forall (X,Y) \in E^2, \quad N(X-Y) \leqslant N(X) + N(Y)$ et $|N(X) - N(Y)| \leqslant N(X-Y)$
- Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$: N_∞ et N_1 sont des normes et tracé des boules unité dans $\mathbb{R}^2$.
- Normes de $C([a,b],\mathbb{K})$: $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont des normes.
- $B(I,E) = \{$fonctions bornées de I dans $E\}$ est un espace vectoriel.
- Une boule ouverte est un ouvert.
- $x \in \overline{A} \iff x$ est la limite d'une suite d'éléments de A.
- Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur E tout entier alors l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E , l' ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé de E et l' ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) = 0\}$ est un fermé de E.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall\, x \in E, \quad ||u(x)||_F \leqslant k||x||_E$ et u est continue sur E.

<u>ATTENTION</u> :
- Pas de normes équivalentes (mais possible en exercice en donnant la défintion).
- Pas de compact.
- Pas d'image réciproque d'ouverts et de fermés dans le cas général.

BONNES VACANCES ! ! !

PROGRAMME 12

Semaine du 3 au 7 janvier

ATTENTION : Lundi 2 janvier férié

1) Espaces vectoriels normés : voir ci-dessus

2) Séries entières :

a) Rayon de convergence d'une série entière : Existence et unicité du rayon.
Définition du disque ouvert de convergence, lien entre les rayons : somme, produit de Cauchy, dérivation formelle, intégration formelle de séries entières.

b) Propriétés de la fonction somme S :
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence (prouvé) et sur le disque ouvert de convergence (admis).
Pour le cas de la variable réelle, S est dérivable sur $]-R, R[$, de classe C^∞ sur $]-R, R[$.
Expression des dérivées successives, unicité des coefficients, calcul d'une primitive.

c) Développements en séries entières classiques.
Fonctions usuelles : $t \longmapsto \ln(1+t)$, $t \longmapsto -\ln(1+t)$, $arctan$, exp, cos, sin, ch, sh
Cas de $t \longmapsto exp(-1/t^2)$, $0 \longmapsto 0$
Méthode avec la série de Taylor.
Méthode avec une équation différentielle.

Questions de cours : Liste exhaustive.

- Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur E tout entier alors l'ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) > 0\}$ est un ouvert de E , l' ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) \geqslant 0\}$ est un fermé de E et l' ensemble $\{x \in E \ / \ f(x) = 0\}$ est un fermé de E.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \ / \ \forall\, x \in E$, $||u(x)||_F \leqslant k||x||_E$ et u est continue sur E.
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Le produit de Cauchy de 2 séries entières est une série entière, rayon.
- Convergence normale d'une série entière sur tout segment de $]-R, R[$. Continuité de la fonction somme sur $]-R, R[$.
- Cas où $0 < R < +\infty$ et $\sum a_n R^n$ absolument convergente. La fonction somme est continue sur $[-R, R]$.
- $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $p!\ a_p = S^{(p)}(0)$
- Développement en série entière de $t \longmapsto (1+t)^a$ pour $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$