

LE TORSEUR STATIQUE

1) Définition

2) Notation

3) Deux cas particuliers

4) Principe fondamental de la statique

5) Surfaces élémentaires et hypothèses

6) Torseur statique des liaisons simples

7) Torseur statique des liaisons composées

8) Dualité torseur statique / torseur cinématique



1) Définition

Toute action mécanique (à distance ou de contact) est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un
torseur

Rappel : un torseur est un ensemble ordonné de deux champs vectoriels tels que : Même forme qu'en cinématique.

- ▶ le 1^{er} champ, appelé résultante du torseur et noté \vec{R} , est un champ constant.
- ▶ le 2^{ème} champ, appelé moment du torseur et noté \vec{M} , est un champ variable vérifiant la formule de changement de point :

$$\vec{M}_A(F) = \vec{M}_B(F) + \vec{AB} \wedge \vec{R}$$

Même formule qu'en cinématique avec les vecteurs vitesses :

$$\vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$



2) Notation

Toute action mécanique d'un ensemble matériel E sur un système mécanique S est caractérisée par un torseur d'action mécanique (ou statique) noté :

Ecriture en ligne
⇒ résultante à gauche

Ecriture en colonne
⇒ résultante en haut

$$\left\{ \mathbf{F}_{E \rightarrow S} \right\}_A = \left\{ \overrightarrow{R}_{E \rightarrow S} \quad \overrightarrow{M}_{A, E \rightarrow S} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{E \rightarrow S} \\ \overrightarrow{M}_{A, E \rightarrow S} \end{array} \right\}_A$$

Résultante

Indépendante du point d'écriture

Moment

qui dépend du point d'écriture



Notation propre à la statique :

Contrairement au torseur cinématique qui n'a pas de notation propre pour ses composantes.

Penser à préciser la base d'écriture

$$\left\{ \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} X_{21} \\ Y_{21} \\ Z_{21} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} L_{21} \\ M_{21} \\ N_{21} \end{array} \right] \end{array} \right\}_A$$

3) Deux cas particuliers

«Forme» équivalente au torseur cinématique d'un mouvement de rotation écrit en un point A de l'axe de rotation.

👉 le glisseur :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R}_{E \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega}_{E/S} \\ \overrightarrow{V}_{A \in E/S} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Même expression en tout point de la droite portant la résultante

Appelée ligne d'action ou axe central du glisseur

«Forme» équivalente au torseur cinématique d'une translation.

👉 le torseur couple :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{M}^A_{E \rightarrow S} \end{array} \right\}_A$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{E/S} = \vec{0}$$

Même expression en tout point de l'espace

Cinématique : vitesse identique en tout point.

4) Principe fondamental de la statique (PFS)

6/19

Accélération nulle.

Pour tout solide S au repos (ou se déplaçant à vitesse constante) :

$$\sum \{ \mathbf{F}_{\text{ext} \rightarrow S} \}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

La somme des torseurs des actions mécaniques extérieures au système isolé, écrits au même point, est égale au torseur nul.

Amène les deux équations vectorielles suivantes : $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext} \rightarrow S}} = \vec{0}$ et $\sum \overrightarrow{M_A(\text{ext} \rightarrow S)} = \vec{0}$

Attention !

-  **bien prendre toutes les actions extérieures au système isolé.**
-  **écrire tous les torseurs au même point et dans la même base.**

Nota : dans les cas simples on peut ne pas utiliser l'outil torseur !...

Notamment dans le cas des problèmes plans.

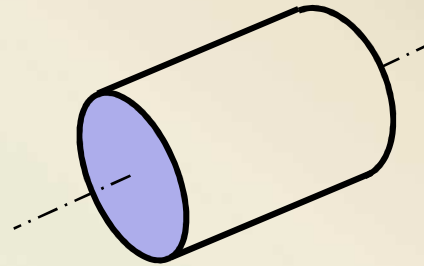


5) Surfaces élémentaires et hypothèses

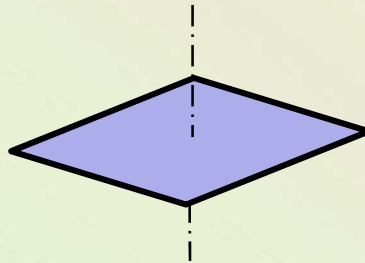
Surfaces élémentaires :

Les liaisons simples sont réalisées à partir de surfaces élémentaires :

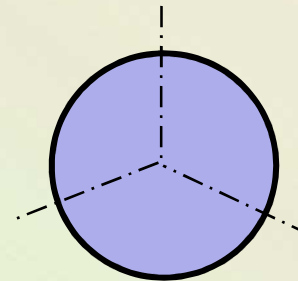
▶ *Le cylindre de révolution :*



▶ *Le plan :*



▶ *La sphère :*



Hypothèses :

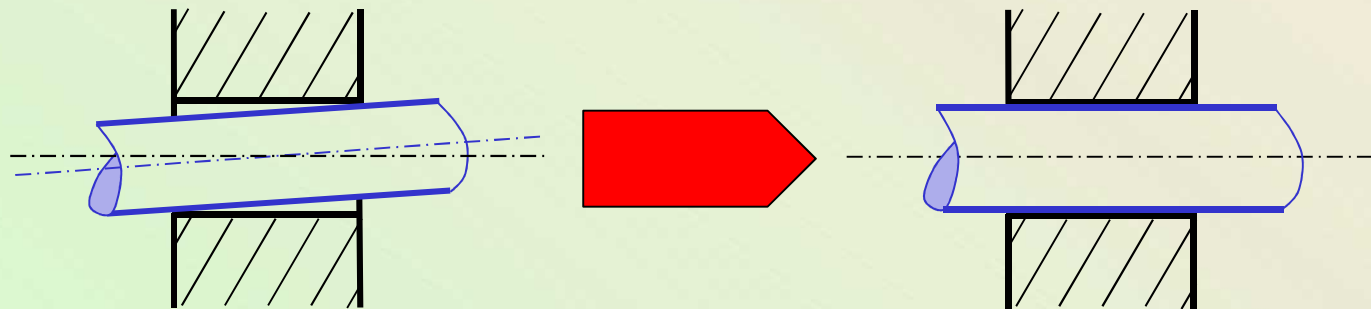
Les plans sont plans, les sphères sphériques,
les cylindres cylindriques....

Les surfaces sont supposées parfaites géométriquement.

Les solides sont supposés indéformables.

A part les ressorts...

Les liaisons sont supposées sans jeu.



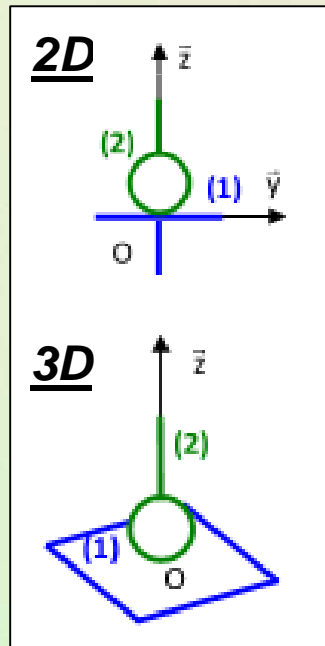
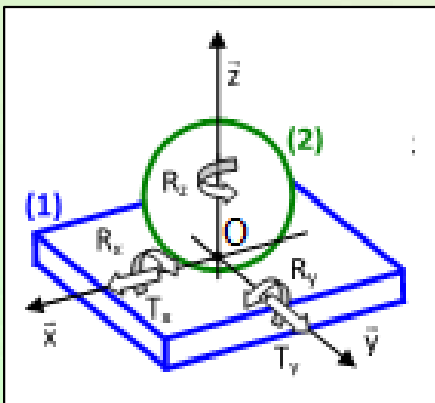
6) Torseur statique des liaisons normalisées simples

→ association de surfaces élémentaires

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

5 Sphère plan (ponctuelle)

**2 translations
3 rotations**



Point O

Normale $O\vec{z}$

Idem à cinématique

$$\forall P \in O\vec{z}$$

Ne transmet pas d'effort selon $O\vec{x}$ et $O\vec{y}$

Glissement 1/2

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{array} \right\} O, \mathcal{B}$$

Ne transmet aucun couple

Toutes les rotations sont possibles

→ association de surfaces élémentaires

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

2

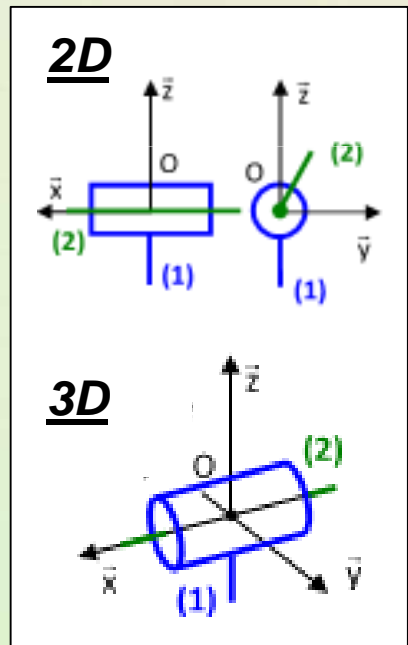
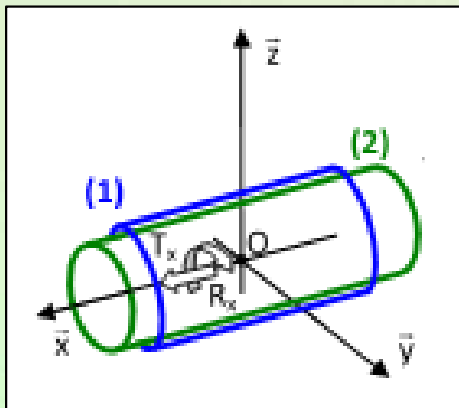
Pivot glissant

Axe $O\vec{x}$

Idem à cinématique

$\forall P \in O\vec{x}$

**1 translation
1 rotation**



Ne transmet pas d'effort selon $O\vec{x}$

Ne transmet pas de couple d'axe $O\vec{x}$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$

Translation et rotation possibles selon $O\vec{x}$

→ association de surfaces élémentaires

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

3 Sphérique

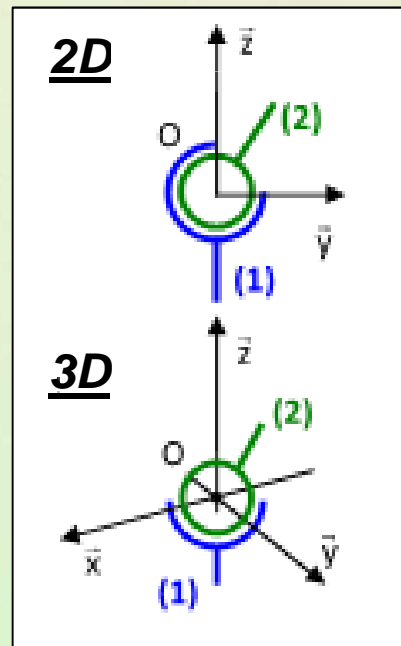
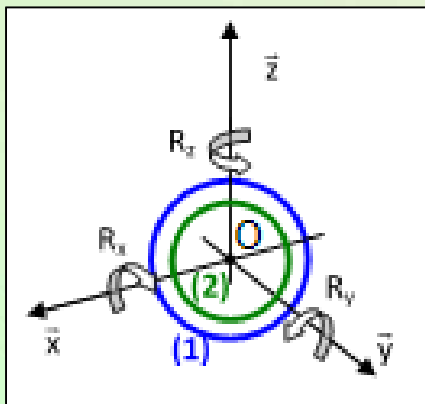
(rotule)

Centre O

Idem à cinématique

en O

3 rotations



$$\left\{ \begin{array}{l|l} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$

Transmet des efforts dans toutes les directions

Ne transmet aucun couple

Ce raisonnement peut s'appliquer pour toutes les liaisons



→ association de surfaces élémentaires

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

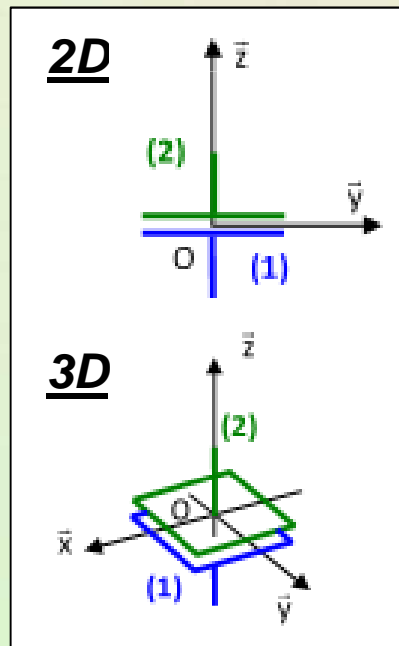
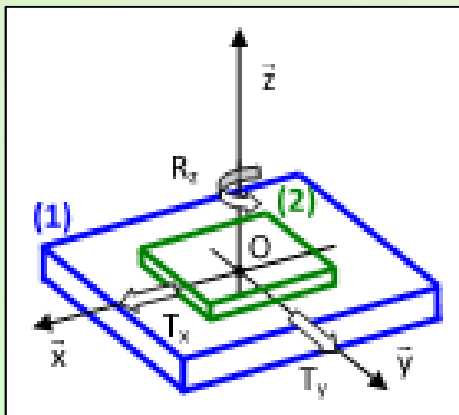
3 Appui plan

Normale $O\vec{z}$

Idem à cinématique

$$\forall P$$

2 translations
1 rotation



$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & L_{21} \\ 0 & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$



→ association de surfaces élémentaires

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

4

Sphère-cylindre

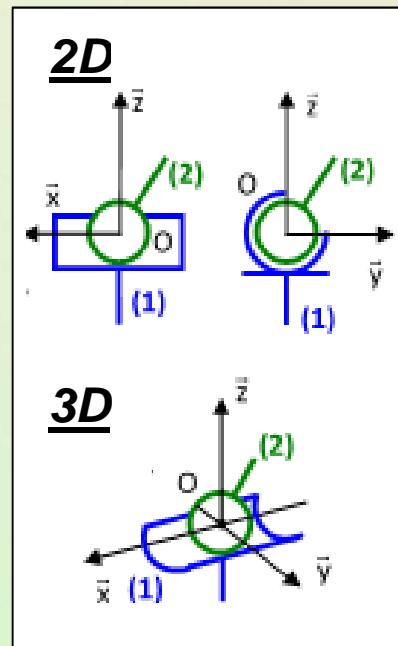
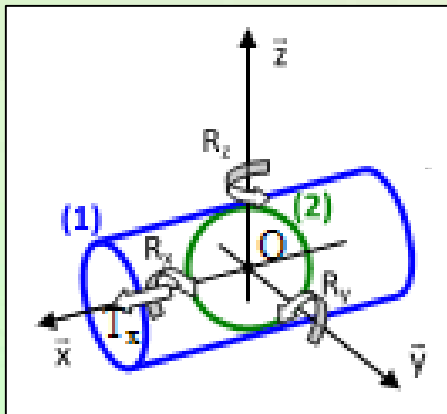
(linéaire annulaire)

Axe $O\vec{x}$

Idem à cinématique

en O

**1 translation
3 rotations**



$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$



→ association de surfaces élémentaires

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

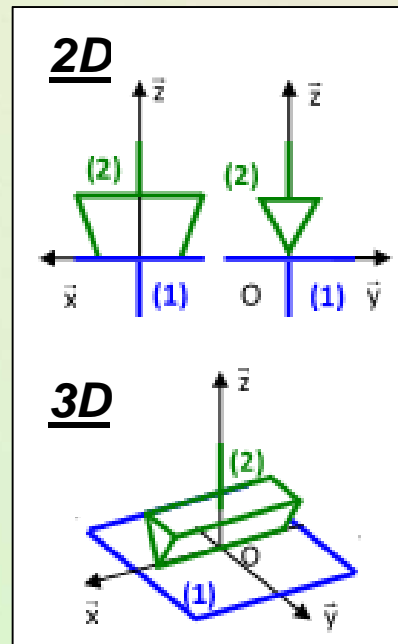
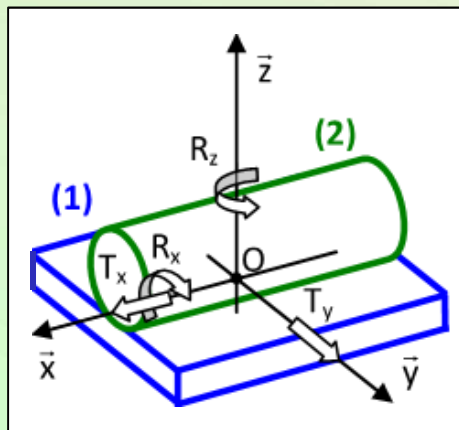
4 Cylindre-plan (linéaire rectiligne)

Droite $O\vec{x}$

Idem à cinématique

$$\forall P \in (O \vec{x} \vec{z})$$

**2 translations
2 rotations**



$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & M_{21} \\ \hline Z_{21} & 0 \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$



7) Torseur statique des liaisons normalisées composées

→ association de liaisons simples

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

1

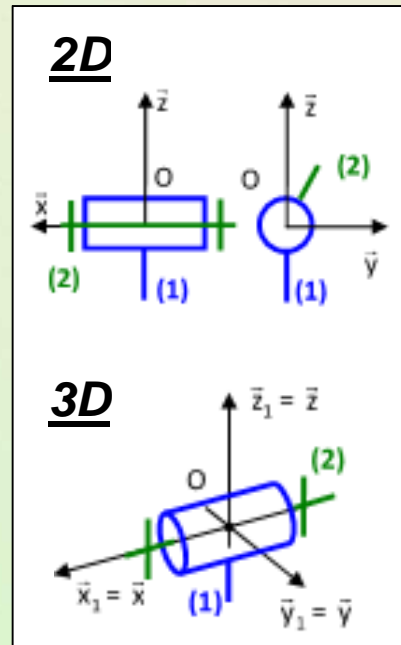
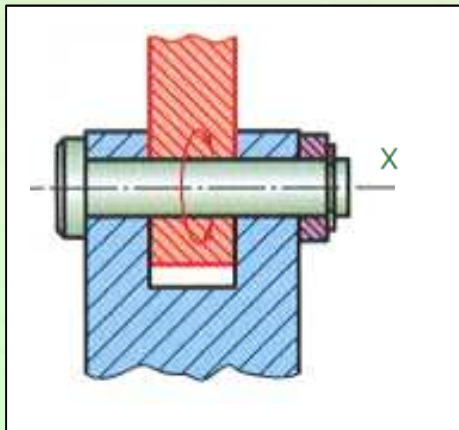
Pivot

Axe $O\vec{x}$

Idem à cinématique

$\forall P \in O\vec{x}$

1 rotation



$$\left\{ \begin{array}{c|c} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$



Liaisons composées

→ association de liaisons simples

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

1

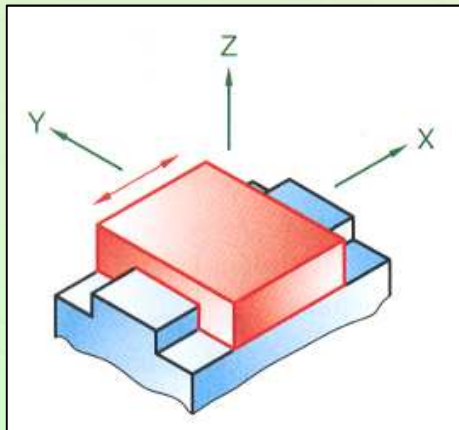
Glissière

Axe $O\vec{x}$

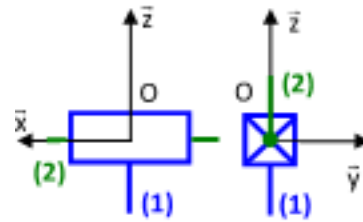
Idem à cinématique

$\forall P$

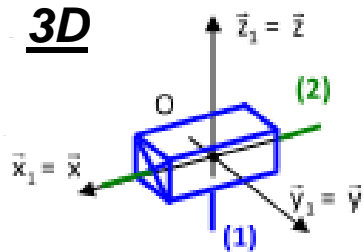
1 translation



2D



3D



$$\left\{ \begin{array}{l|l} 0 & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$



Liaisons composées

→ association de liaisons simples

Degrés de liberté	Nom	Symbole	Caractéristiques géométriques	Torseur statique	Zone validité
-------------------	-----	---------	-------------------------------	------------------	---------------

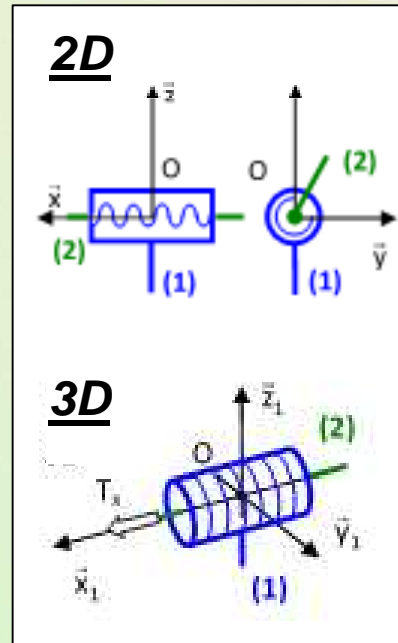
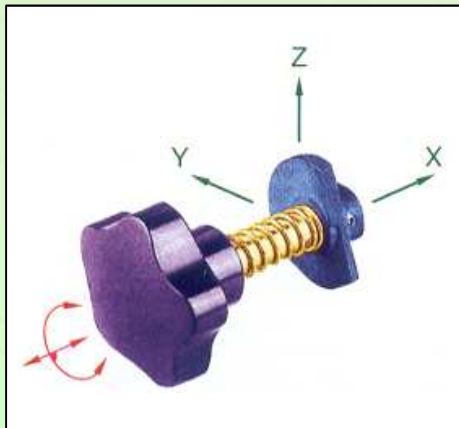
1 Hélicoïdale

Axe $O\vec{x}$

Idem à cinématique

$$\forall P \in O\vec{x}$$

1 rotation
associée à
1 translation



$$\left\{ \begin{array}{l|l} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$

avec :

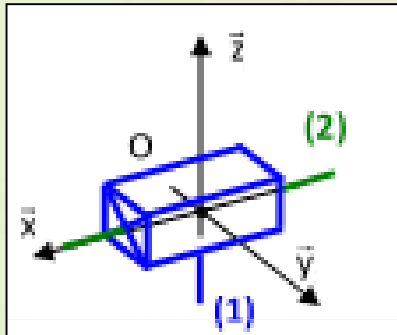
$$L_{21} = \pm \frac{p}{2\pi} \times X_{21}$$



8) Dualité torseur statique / torseur cinématique

Il y a une complémentarité entre la forme du torseur cinématique et la forme du torseur d'action mécanique transmissible.

Exemple : liaison glissière



On «croise» les colonnes et on met des **0** là où il n'y en n'a pas et inversement.

👉 *Torseur statique :*

$$\left\{ \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{L}_{21} \\ \mathbf{Y}_{21} & \mathbf{M}_{21} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{N}_{21} \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$

Attention à la notation !

👉 *Torseur cinématique :*

$$\left\{ \mathbf{V}_{2/1} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{V}_x \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right\}_{O, \mathcal{B}}$$

Ce qu'il faut avoir retenu (minimum « vital »...)

- ▶ Connaître la forme et la notation normalisée d'un torseur statique.
- ▶ Connaître les cas particuliers du glisseur et du torseur couple.
- ▶ Savoir écrire le **PFS** avec l'outil torseur et/ou deux égalités vectorielles.
- ▶ Savoir pour les différentes liaisons normalisées :
 - ➡ le nom ainsi que les symboles **2D** et **3D** (idem à cinématique).
 - ➡ les caractéristiques géométriques (idem à cinématique).
 - ➡ la «*forme*» du torseur statique correspondante.
 - ➡ la zone de validité de la «*forme*» du torseur statique (idem à cinématique).
 - ➡ la dualité entre les «*formes*» des torseurs cinématique et statique.