LIAISONS CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES

1) Définition

On appelle liaison cinématiquement équivalente (notée $L_{éq}$) la liaison théorique pouvant se substituer à un ensemble de liaisons d'un mécanisme tout en offrant exactement les mêmes mouvements.

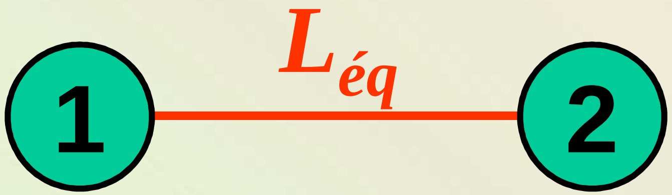
2) Approche cinématique

La liaison équivalente $L_{éq}$ est celle dont le torseur cinématique est de forme identique à l'ensemble des torseurs cinématiques des liaisons initiales.

3) Liaisons en parallèle

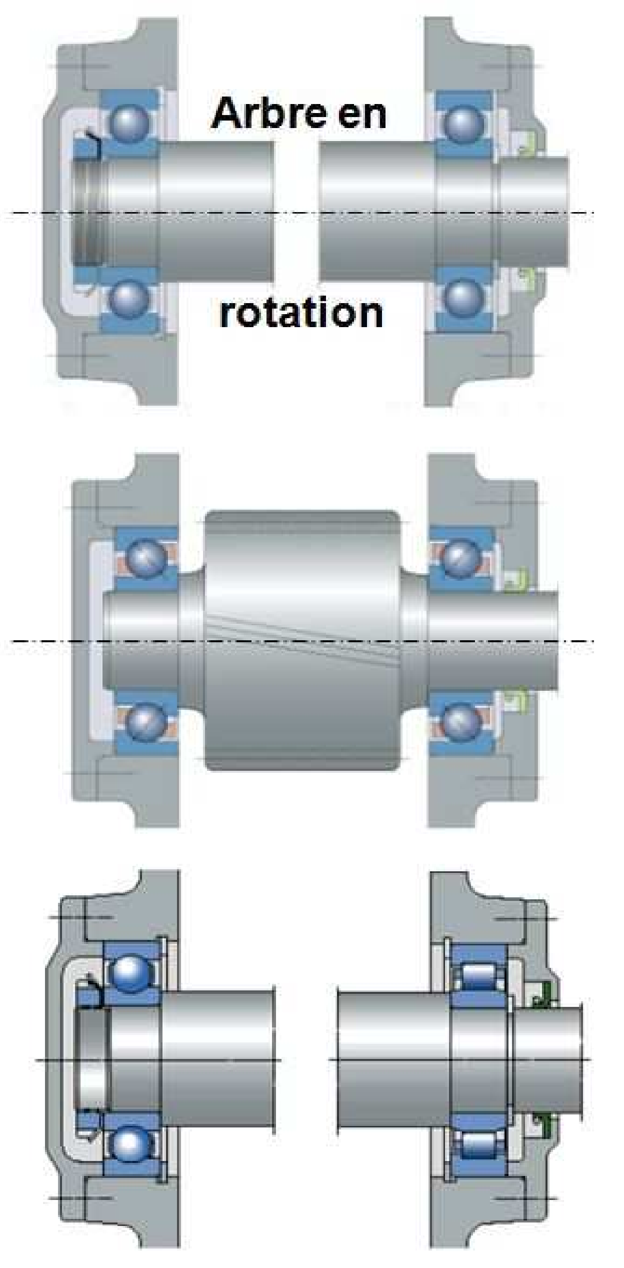
Le graphe des liaisons est de la forme :

et on veut



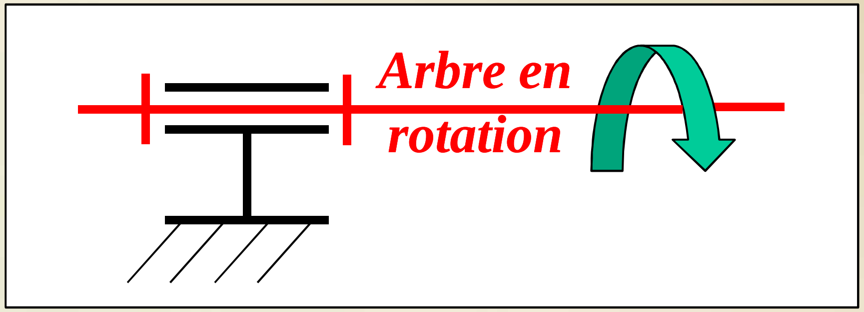
Les mouvements doivent être autorisés par <u>toutes</u> les liaisons (communs à chaque liaison)

égalité des torseurs cinématiques

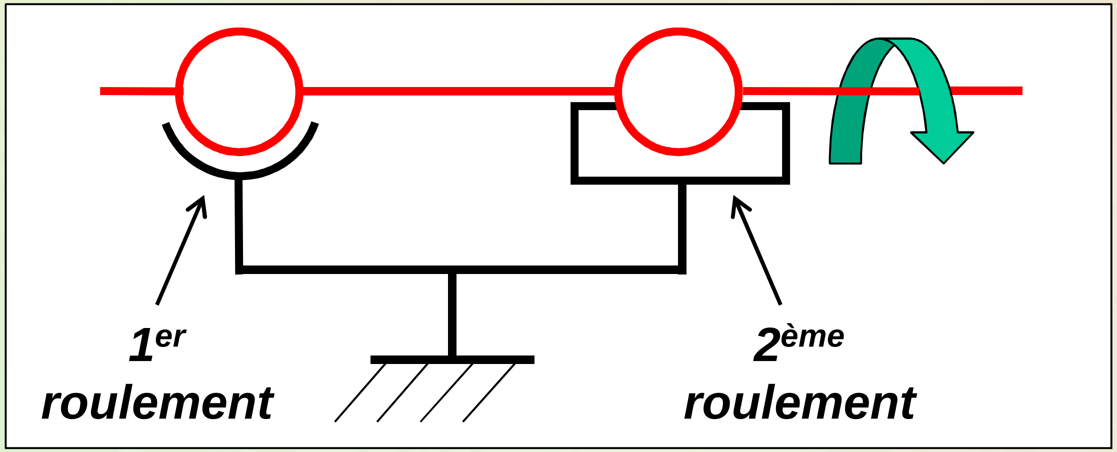


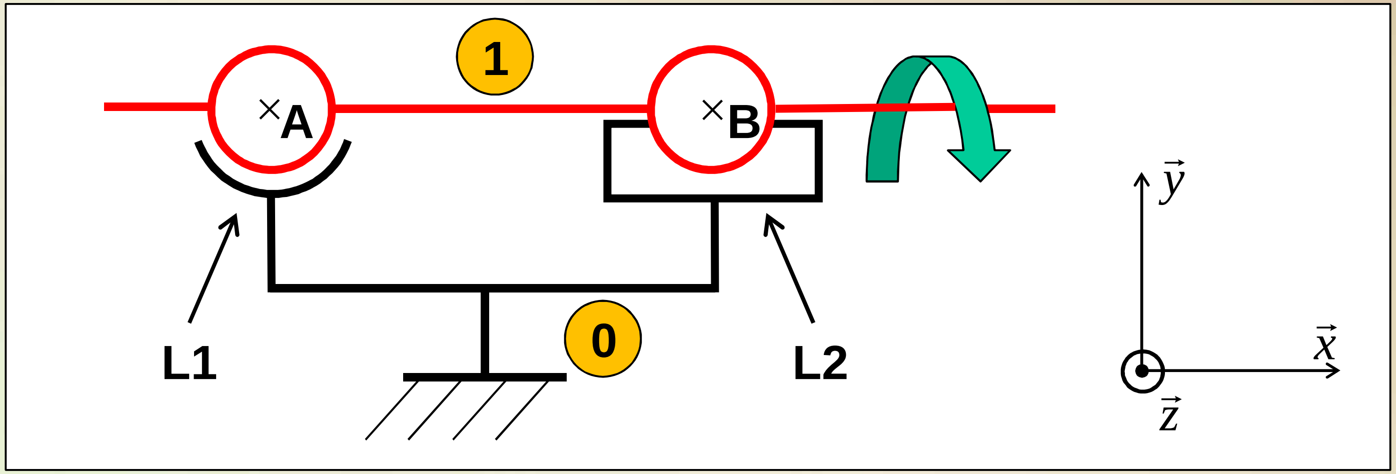
Cas d'une liaison pivot réalisée avec deux roulements

Schéma cinématique :



Autre schéma cinématique plus « précis » :





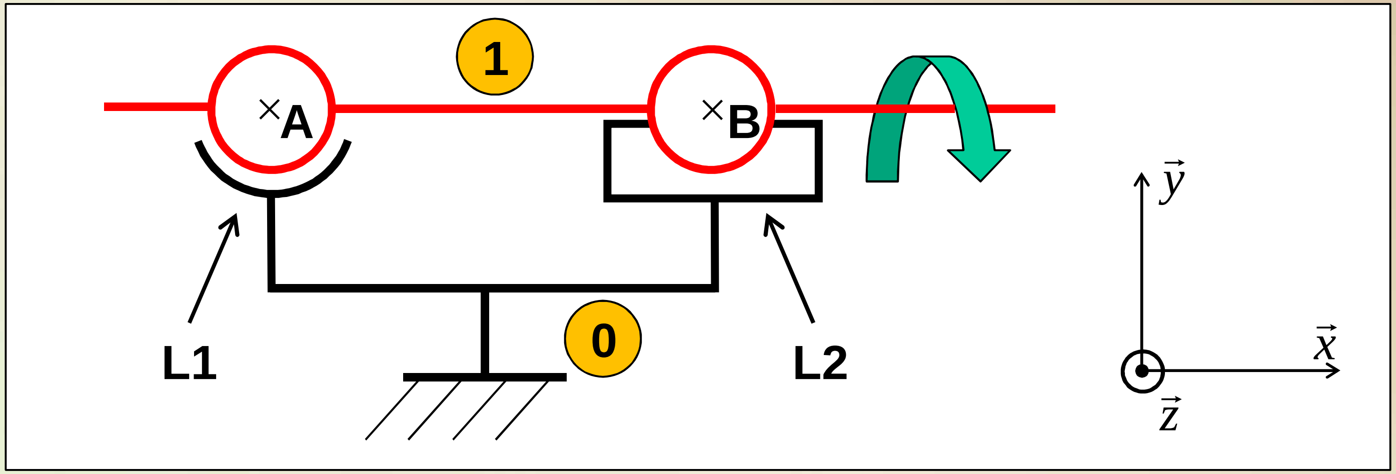
Sphérique
en A

Graphe des liaisons : 0 — 1

Sphère cylindre
Axe $B\vec{x}$

Liaisons en parallèle

Egalité des torseurs cinématiques



- **Sphérique en A (notée L1) :**

Torseur cinématique écrit au centre de la liaison :

Forme vraie en A

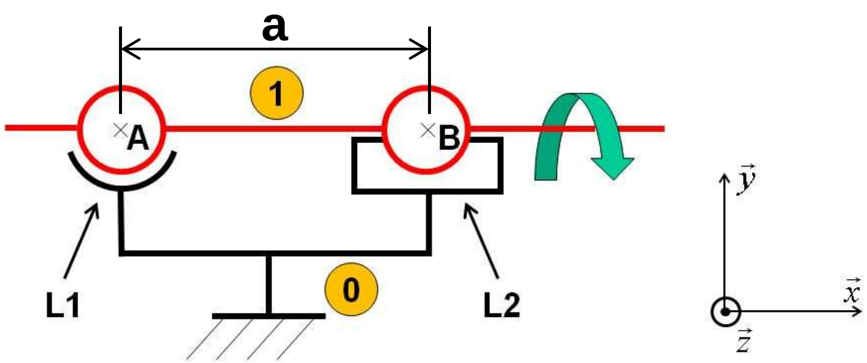
$$\left\{\mathcal{V}_{\mathrm{L1\ 1/0}}\right\}_{\mathrm{A}} = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x1}\\ \omega_{y1}\\ \omega_{z1}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}_{A,R}$$

- **Sphère-cylindre en B (notée L2) :**

Torseur cinématique écrit au centre de la liaison :

Forme vraie en B

$$\left\{\mathcal{V}_{\mathrm{L2\ 1/0}}\right\}_{\mathrm{B}} = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x2}\\ \omega_{y2}\\ \omega_{z2}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}v_{x2}\\0\\0\end{bmatrix}\right\}_{B,R}$$



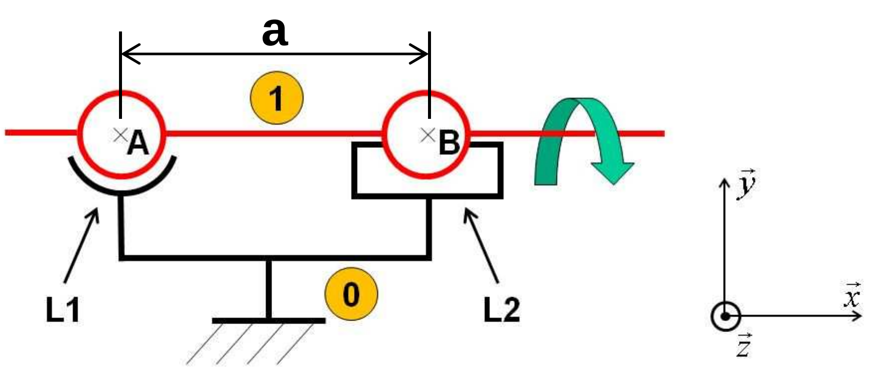
$$\left\{\mathcal{V}_{\text{L1 1/0}}\right\}_{A} = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x1}\\ \omega_{y1}\\ \omega_{z1}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}_{A,R}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{\text{L2 1/0}}\right\}_{B} = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x2}\\ \omega_{y2}\\ \omega_{z2}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}v_{x2}\\0\\0\end{bmatrix}\right\}_{B,R}$$

Faisons les calculs en A :

- ***Liaison L1*** ➡ ***OK***
- ***Liaison L2*** ➡ ***calculons la vitesse au point A***

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 1/0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \begin{bmatrix}v_{x2}\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}\omega_{x2}\\ \omega_{y2}\\ \omega_{z2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}v_{x2} + 0\\ 0 - a\times\omega_{z2}\\ 0 + a\times\omega_{y2}\end{bmatrix}$$



$$\left\{\mathcal{V}_{L1\,1/0}\right\}_A = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x1}\\ \omega_{y1}\\ \omega_{z1}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}_{A,R}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{L2\,1/0}\right\}_B = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x2}\\ \omega_{y2}\\ \omega_{z2}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}v_{x2}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}_{B,R}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{L2\,1/0}\right\}_A = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x2}\\ \omega_{y2}\\ \omega_{z2}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}v_{x2}\\ -a\,\omega_{z2}\\ +a\,\omega_{y2}\end{bmatrix}\right\}_{A,R}$$

Egalité des torseurs cinématiques :

$$\begin{cases}\begin{cases}\omega_{x\,éq} = \omega_{x1} = \omega_{x2} & \Rightarrow \omega_{x\,éq} \neq 0\\ \omega_{y\,éq} = \omega_{y1} = \omega_{y2} & \Rightarrow \omega_{y\,éq} = 0\\ \omega_{z\,éq} = \omega_{z1} = \omega_{z2} & \Rightarrow \omega_{z\,éq} = 0\end{cases}\\ \begin{cases}v_{x\,éq} = 0 = v_{x2} & \Rightarrow v_{x\,éq} = 0\\ v_{y\,éq} = 0 = -a\omega_{z2} & \Rightarrow v_{y\,éq} = 0 \ \underline{\text{et}}\ \omega_{z2} = 0\\ v_{z\,éq} = 0 = +a\omega_{y2} & \Rightarrow v_{z\,éq} = 0 \ \underline{\text{et}}\ \omega_{y2} = 0\end{cases}\end{cases}$$

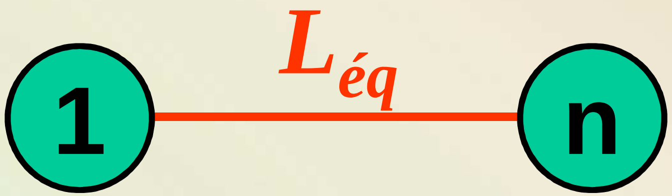
$$\left\{\mathcal{V}_{éq}\right\}_A = \left\{\begin{bmatrix}\omega_x\\ 0\\ 0\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ **Pivot d'axe $A\vec{x}$**

4) Liaisons en série

Le graphe des liaisons est de la forme :

et on veut

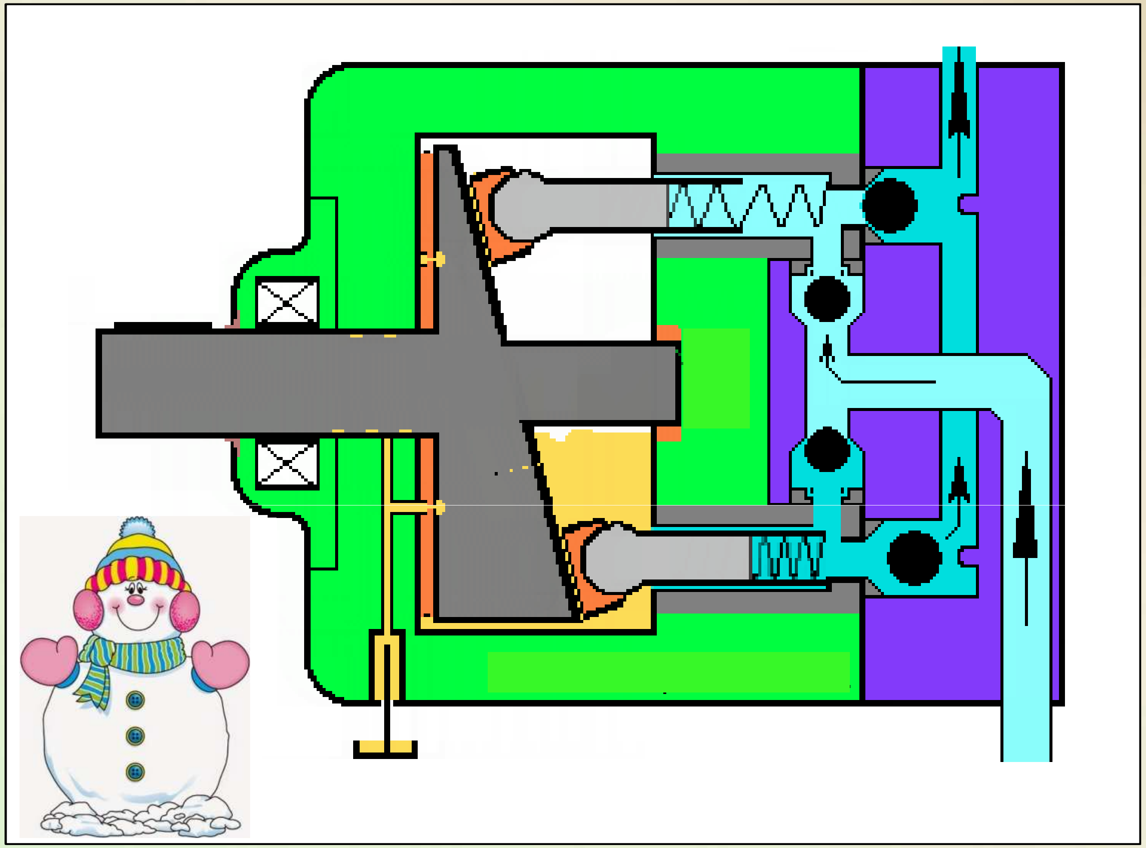


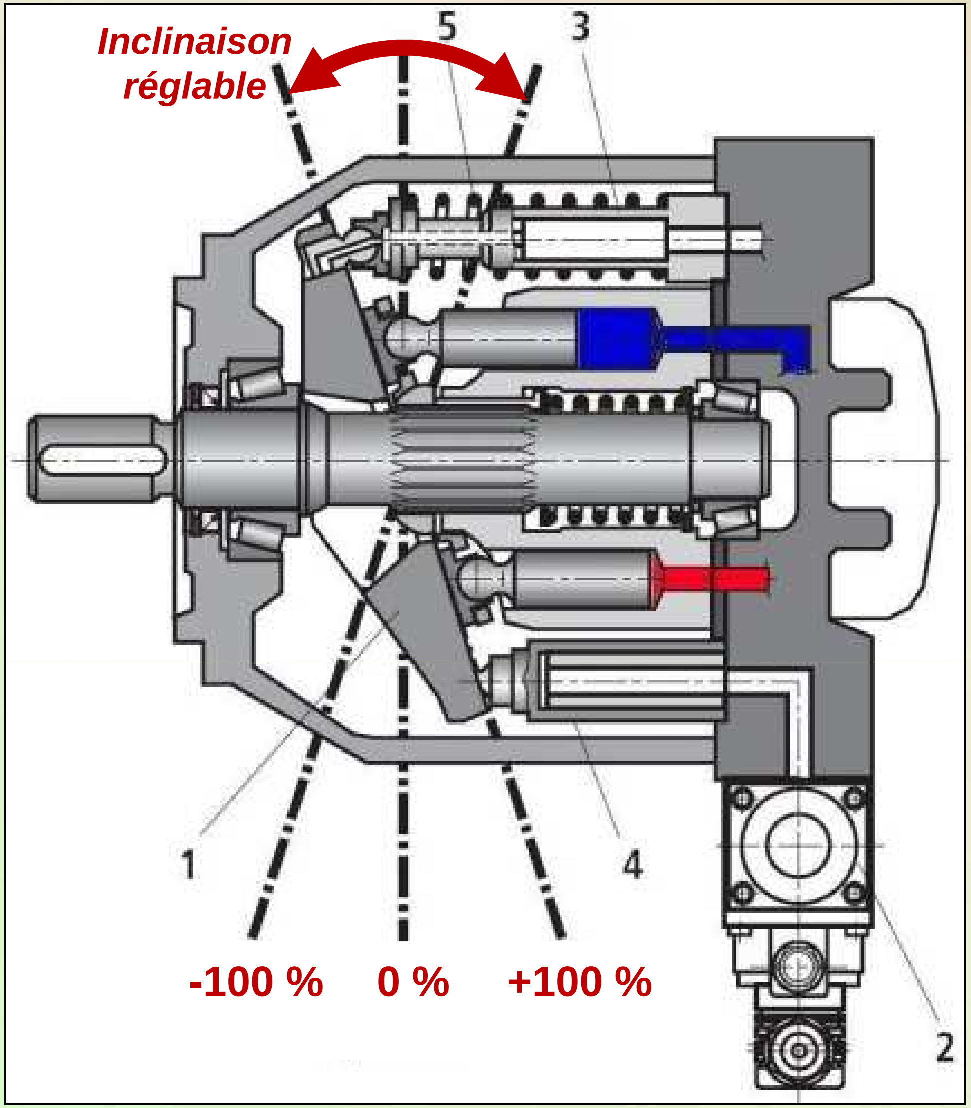
Les mouvements autorisés par une des liaisons le sont globalement (les mouvements « s'ajoutent »)

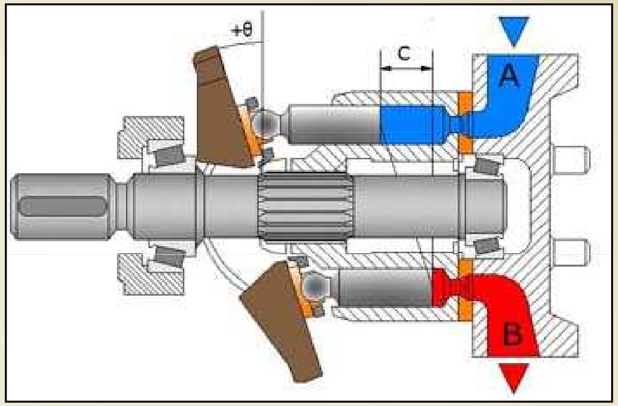
somme des torseurs cinématiques

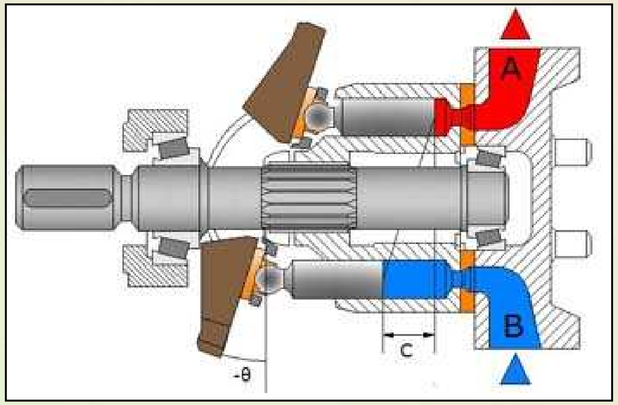
Nota : $\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\}_A = \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}_A + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}_A$ ***Composition des mouvements***

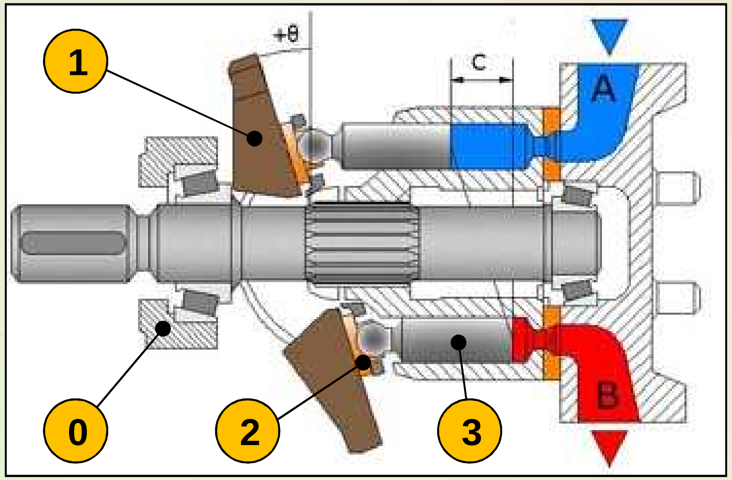
Pompe à pistons axiaux




Inclinaison
réglable
5
3
1
4
2
-100 %
0 %
+100 %


+θ
c
A
B


A
B
c
-θ



Graphe des liaisons des solides 1,2 et 3:

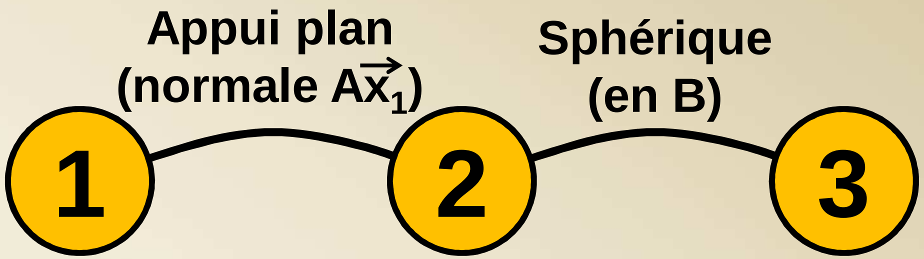
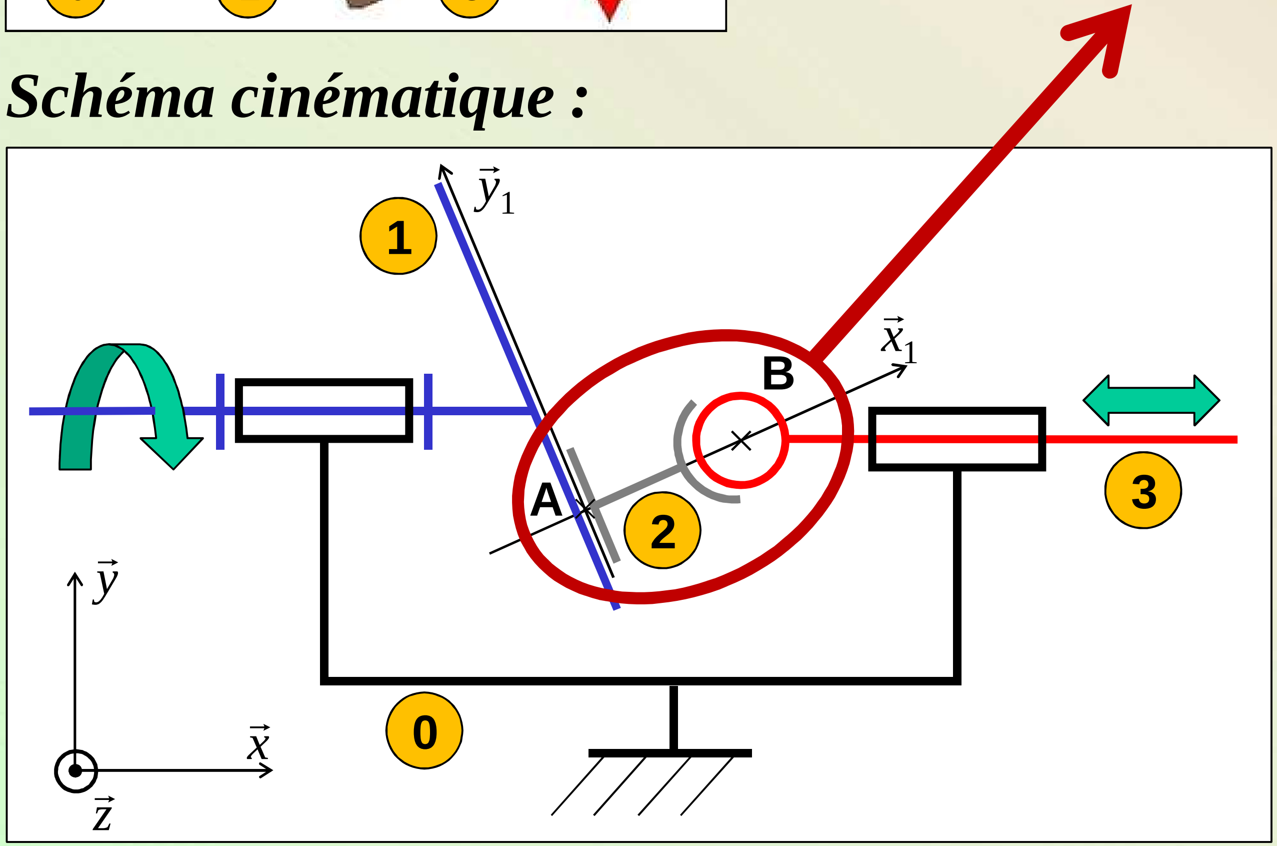
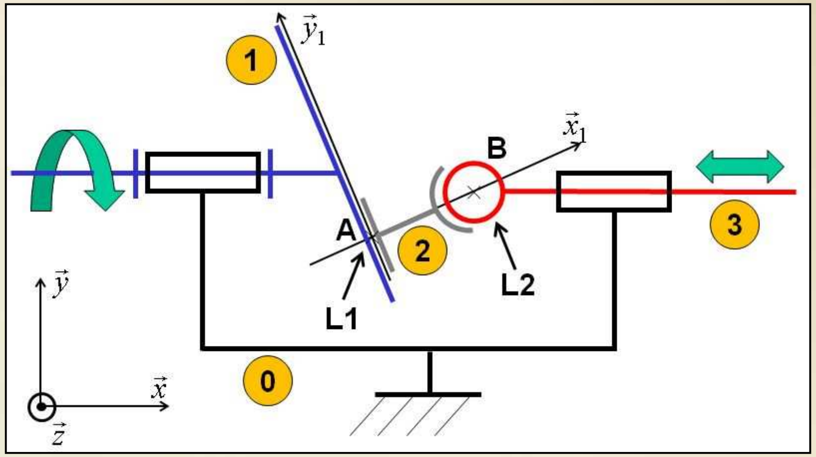


Schéma cinématique :



Liaisons en série

Somme des torseurs cinématiques



- Appui plan en A (noté L1) :

Torseur cinématique écrit dans R_1 au centre de la liaison :

$$\left\{\mathcal{V}_{L1\,1/0}\right\}_A = \left\{\begin{bmatrix} \omega_{x_1 1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ v_{y_1 1} \\ v_{z_1 1} \end{bmatrix}\right\}_{A,R_1}$$

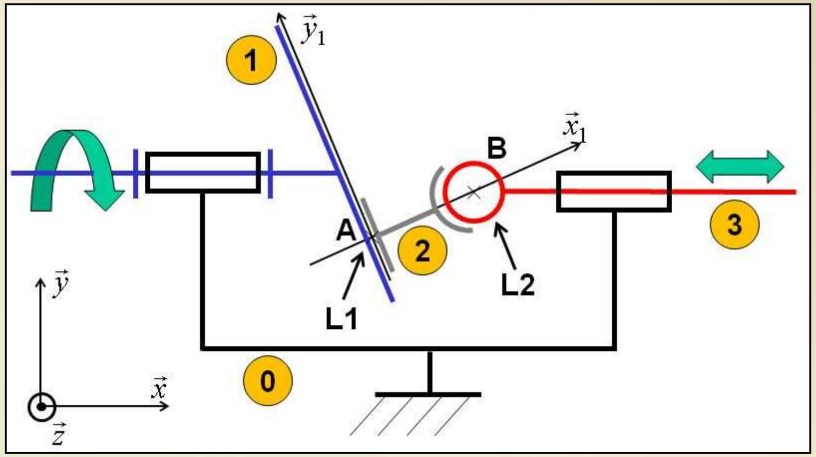
Forme vraie en tout point

- Sphérique en B (notée L2) :

Torseur cinématique écrit au centre de la liaison :

$$\left\{\mathcal{V}_{L2\,1/0}\right\}_B = \left\{\begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}_{B,R\text{ "ou" }R_1}$$

Forme vraie en B



Faisons les calculs en B et dans le repère R1 :

► ***Liaison L1*** ➡ ***en B :***

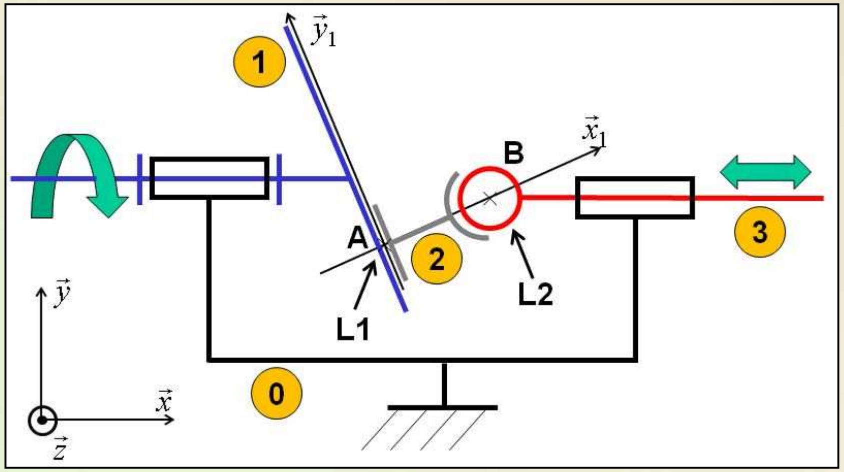
$$\left\{\mathcal{V}_{\mathbf{L1\ 1/0}}\right\}_{\mathbf{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x_1 1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ v'_{y_1 1} \\ v'_{z_1 1} \end{bmatrix} \right\}_{B,R_1}$$

► ***Liaison L2*** ➡ ***OK***

$$\left\{\mathcal{V}_{\mathbf{L2\ 1/0}}\right\}_{\mathbf{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{B,R_1}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{\mathbf{L1\ 1/0}}\right\}_{\mathbf{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x_1 1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ v'_{y_1 1} \\ v'_{z_1 1} \end{bmatrix} \right\}_{B,R_1}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{\mathbf{L2\ 1/0}}\right\}_{\mathbf{B}} = \left\{ \begin{bmatrix} \omega_{x 2} \\ \omega_{y 2} \\ \omega_{z 2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{B,R_1}$$



$$\left\{\mathcal{V}_{L1\,1/0}\right\}_B = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x_1 1}\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\v'_{y_1 1}\\v'_{z_1 1}\end{bmatrix}\right\}_{B,R_1}$$

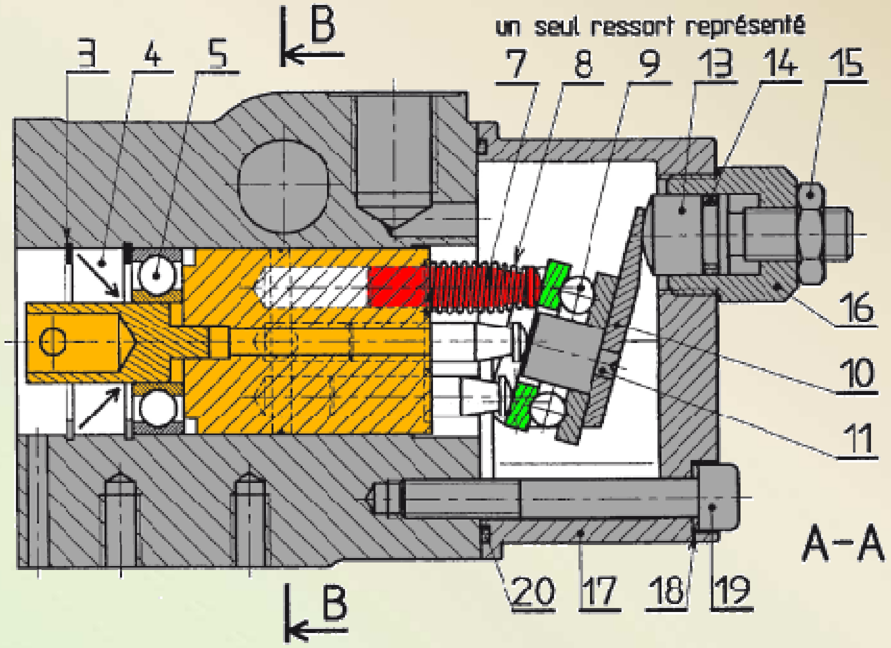
$$\left\{\mathcal{V}_{L2\,1/0}\right\}_B = \left\{\begin{bmatrix}\omega_{x2}\\\omega_{y2}\\\omega_{z2}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}_{B,R_1}$$

Somme des torseurs cinématiques :

$$\begin{cases}\begin{cases}\omega_{x\,éq} = \omega_{x_1 1} + \omega_{x2} & \Rightarrow \omega_{x\,éq} \neq 0\\ \omega_{y\,éq} = 0 + \omega_{y2} & \Rightarrow \omega_{y\,éq} \neq 0\\ \omega_{z\,éq} = 0 + \omega_{z2} & \Rightarrow \omega_{z\,éq} \neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}v_{x\,éq} = 0 + 0 & \Rightarrow v_{x\,éq} = 0\\ v_{y\,éq} = v'_{y_1 1} + 0 & \Rightarrow v_{y\,éq} \neq 0\\ v_{z\,éq} = v'_{z_1 1} + 0 & \Rightarrow v_{z\,éq} \neq 0\end{cases}\end{cases}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{éq}\right\}_B = \left\{\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\v_y\\v_z\end{bmatrix}\right\}_{R1}$$

$\Rightarrow$ **Sphère plan d'axe $B\vec{x}_1$**

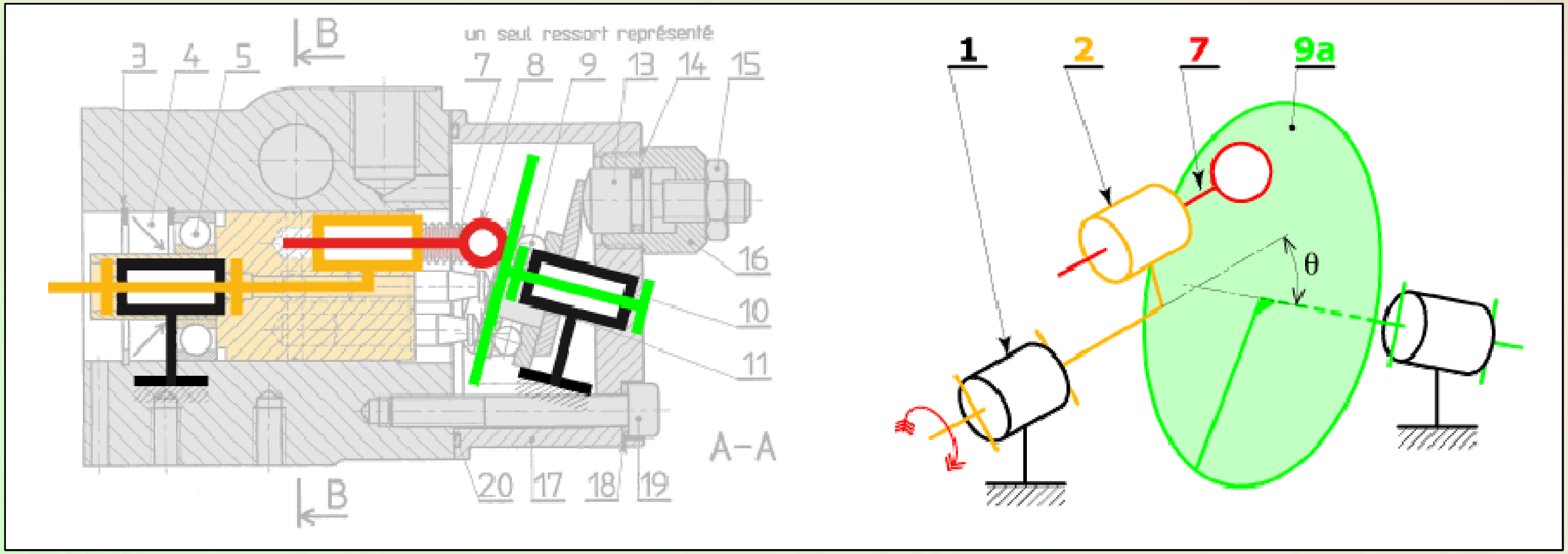


1 : Corps fixe

2 : Barillet

7 : Piston

9a : Plateau



FIN