STABILITE

Etude d'exemples

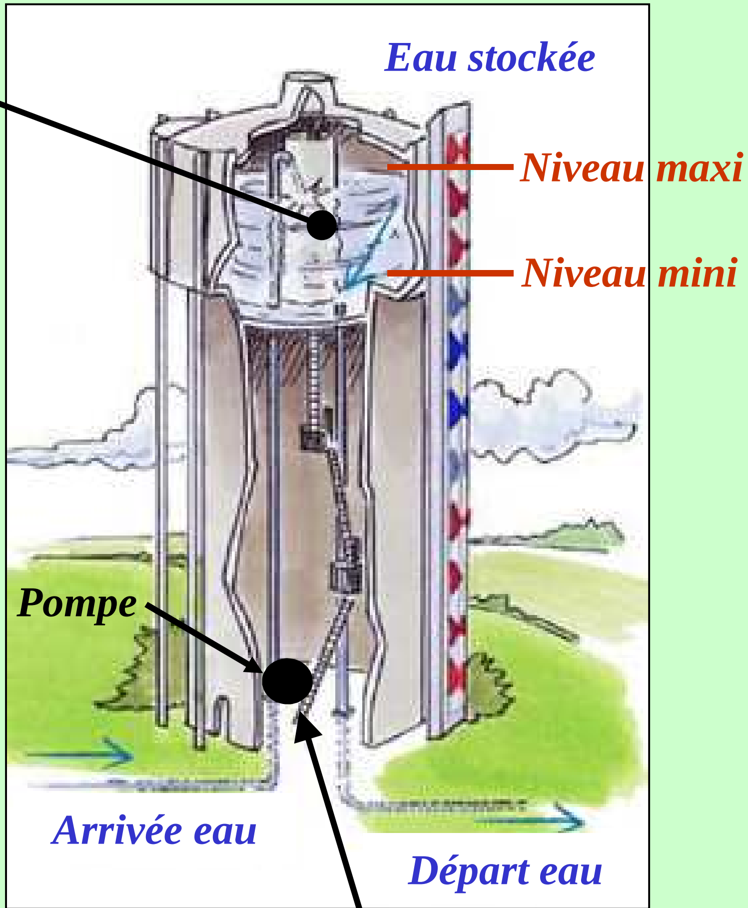
Système intégrateur

Cas d'un système linéaire mais instable

1er exemple

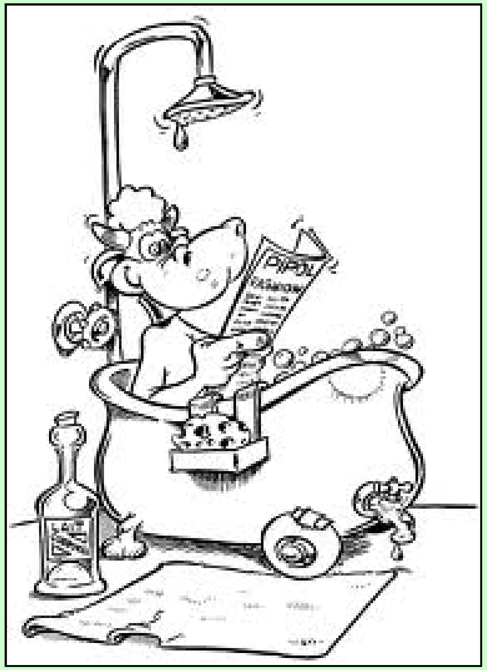
régulation

Régulation de la hauteur du niveau d'eau entre deux valeurs données.

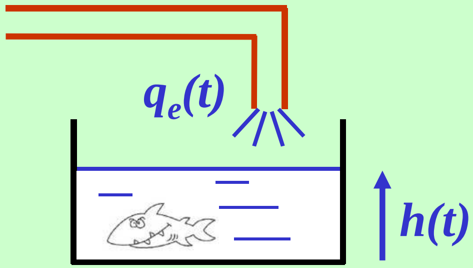


La pompe marche dès que le niveau mini est atteint et s'arrête dès que le niveau maxi est atteint.

Différent d'un asservissement car ici on n'a que deux valeurs fixes (mini et maxi).



Autre exemple



1^{er} exemple

- ***variable d'entrée :*** $q_e(t)$ — Débit en m^3/s
- ***variable de sortie :*** $h(t)$ — Hauteur en m
- ***paramètre :*** S — Surface de la cuve supposée <u>constante</u> en m^2

1) Equation différentielle :

si pas de pertes : Fuite, évaporation…

Volume d'eau rentrant pendant le temps dt ➡ *Volume d'eau faisant monter le niveau pendant ce temps dt*

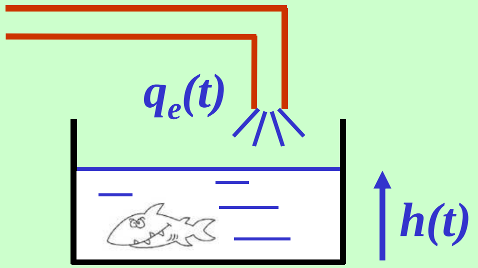
$q_e.dt$ ➡ $S.dh$ ➡
$$\boxed{\underbrace{\frac{dh(t)}{dt}}_{\text{Sortie}} = \underbrace{\frac{q_e(t)}{S}}_{\text{Entrée}}}$$

m³/s* x *s ➡ volume

m²* x *m ➡ volume

De la forme : $$0\times s(t)+1\times\frac{ds(t)}{dt}+0\times\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\ldots=\frac{1}{S}\times e(t)+0\times\frac{de(t)}{dt}+\ldots$$

➡ équation différentielle représentative d'un système <u>linéaire</u>



- ***variable d'entrée :*** $q_e(t)$
- ***variable de sortie :*** $h(t)$
- ***paramètre :*** S

1er exemple

1) Equation différentielle :

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q_e(t)}{S}}$$

2) Fonction de transfert :

« la fonction de transfert traduit l'évolution du système depuis une position d'équilibre donc les c.i. sont supposées nulles »

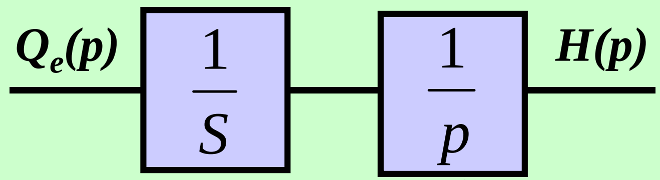
Théorème de dérivation

$$p.H(p) - \cancel{h_{(t=0)}} = \frac{Q_e(p)}{S} \Rightarrow p.H(p) = \frac{Q_e(p)}{S}$$

soit

$$\boxed{FT(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \underbrace{\frac{1}{S}}_{\text{action proportionnelle}} . \underbrace{\frac{1}{p}}_{\text{intégrateur}}}$$

d'où



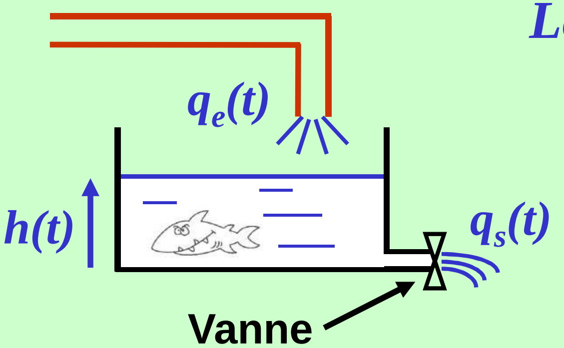
Instabilité visible sur le schéma bloc car intégrateur en série

Ce système linéaire est instable !

En effet si l'entrée $q_e(t)$ = ***cte*** alors la sortie $h(t)$ augmente indéfiniment (non constante)

Système non linéaire mais stable

2ème exemple



Le même système que précédemment mais avec fuite (vanne)

α est appelé la caractéristique de la vanne

Hyp: $q_s(t) = \alpha\sqrt{h}$

Le débit de fuite est lié à la pression d'eau au niveau de la vanne et plus précisément à la racine carrée de la hauteur d'eau.

eau rentrante - eau sortante ⇒ *variation du niveau d'eau*

$q_e.dt$ — $q_s.dt$ ⇒ $S.dh$

Volume — Volume — Volume

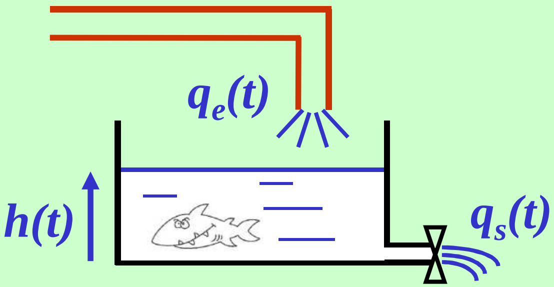
$$\Rightarrow q_e(t) - \alpha.\sqrt{h(t)} = S.\frac{dh(t)}{dt}$$

d'où

$$\boxed{S.\frac{dh(t)}{dt} + \alpha.\sqrt{h(t)} = q_e(t)}$$

sortie *entrée*

$2^{ème}$ exemple



$$\underbrace{S.\frac{dh(t)}{dt}+\alpha.\sqrt{h(t)}}_{\text{Sortie}} = \underbrace{q_e(t)}_{\text{Entrée}}$$

On ne retrouve pas (à cause de la racine carrée) la forme :

$$a_0\times s(t)+a_1\times\frac{ds(t)}{dt}+a_2\times\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\ldots=b_0\times e(t)+b_1\times\frac{de(t)}{dt}+b_2\times\frac{d^2e(t)}{dt^2}+\ldots$$

➡ système <u>non linéaire</u>

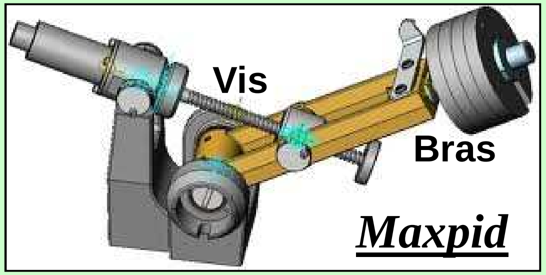
Système non linéaire mais stable !

Tout au moins relativement à l'entrée en échelon

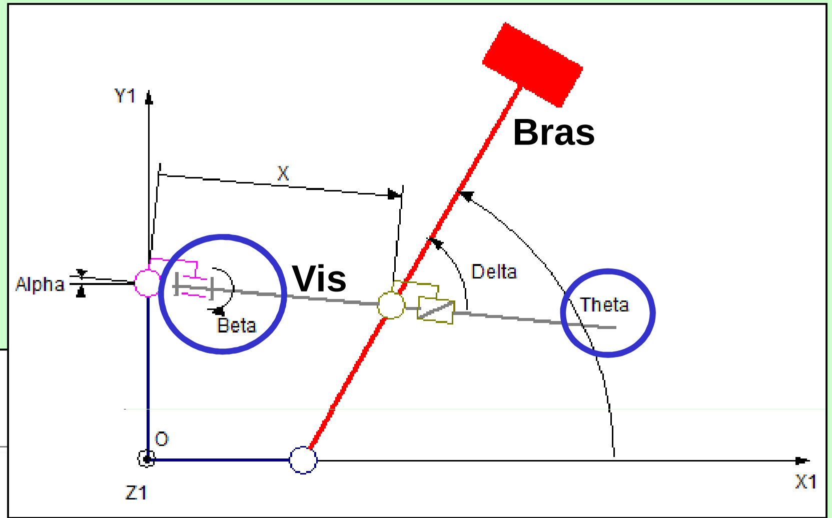
En effet plus le niveau d'eau monte, plus la pression à la vanne augmente et plus le débit de fuite augmente. Il arrivera bien un moment (si les parois sont suffisamment hautes…) où le débit de fuite deviendra le même que celui d'entrée (échelon) d'où une stabilisation de la hauteur d'eau (sortie du système).

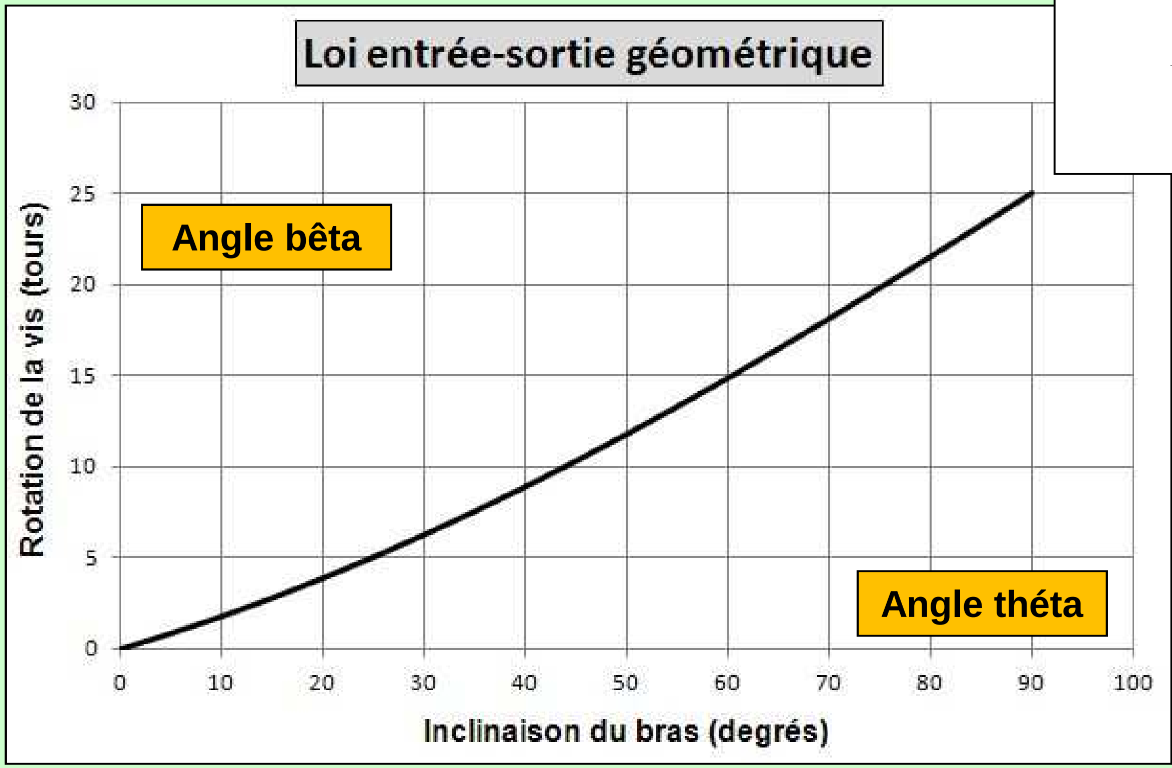
Autre exemple de système <u>non linéaire</u>

3ème exemple



Système de notre labo





La loi entrée-sortie n'est pas une <u>droite linéaire</u>, le système est donc non linéaire.

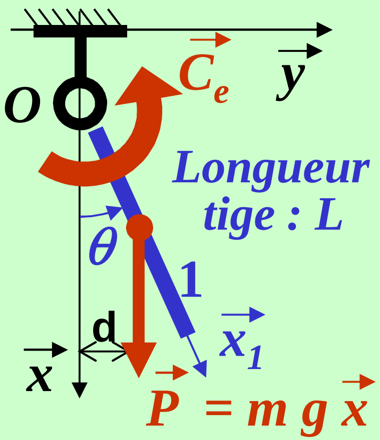
Plusieurs définitions de stabilité

$4^{ème}$ exemple

Exemple d'un pendule rigide (sans frottement dans la pivot) :

On suppose appliquer un couple extérieur $C_e(t)$ et la liaison pivot est parfaite.

Notamment sans frottement



PFD appliqué à la tige, équation des moments en O en projection sur l'axe de rotation.

Même raisonnement que le PFS mais on égale au moment dynamique (sera vu plus tard…) et non à zéro.

« poids x bras de levier **d** »

m g $\qquad \frac{L}{2} \times \sin\theta$

Méthode à appliquer systématiquement

- ***1) On isole : la tige.***
- ***2) BAME : couple extérieur, action du bâti (pivot), poids.***
- ***3) PFD : moments en O en projection sur l'axe de rotation.***

$$C_e + 0 - m\,g\,\frac{L}{2}\sin\theta = I_{O\vec{z}}\,\ddot{\theta}$$

Couple extérieur — Pivot parfaite — Pesanteur — Moment dynamique

$$I_{O\vec{z}}\,\ddot{\theta} + m\,g\,\frac{L}{2}\sin\theta = C_e$$

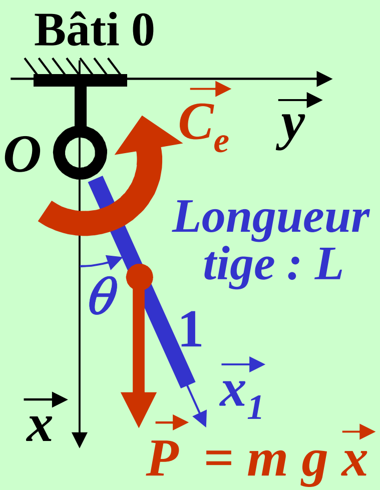
Moment d'inertie

Plusieurs définitions de stabilité

4ème exemple

Exemple d'un pendule rigide (sans frottement dans la pivot) :

On suppose appliquer un couple extérieur $C_e(t)$ et la liaison pivot est parfaite.



$$I_{O\vec{z}}\;\ddot{\theta} + m\;g\;\frac{L}{2}\;\sin\theta\;=\;C_e$$

Linéarisation : ***si θ petit*** $\quad \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{I_{O\vec{z}}\;\ddot{\theta}(t) + m\;g\;\frac{L}{2}\;\theta(t)}_{\text{Sortie}}\;=\;\underbrace{C_e(t)}_{\text{Entrée}}$$

De la forme :

$$\frac{mgL}{2}\times s(t) + 0\times\frac{ds(t)}{dt} + I_{O\vec{z}}\times\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \ldots = 1\times e(t) + 0\times\frac{de(t)}{dt} + \ldots$$

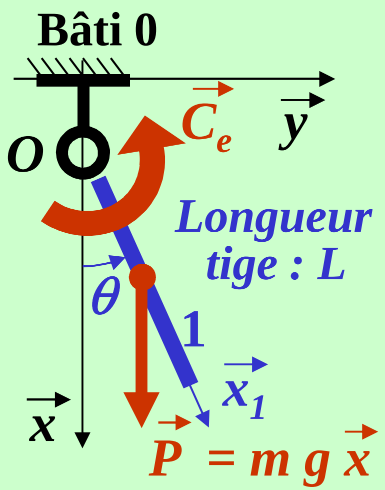
➡ équation différentielle représentative d'un système linéaire

Plusieurs définitions de stabilité

4ème exemple

Exemple d'un pendule rigide (sans frottement dans la pivot) :

On suppose appliquer un couple extérieur $C_e(t)$ et la liaison pivot est <u>parfaite</u>.



$$I_{O\vec{z}}\ \ddot{\theta}(t) + m\ g\ \frac{L}{2}\ \theta(t) = C_e(t)$$

A entrée bornée ne correspond pas une sortie bornée.

Pour que le couple extérieur soit suffisant afin de faire tourner le pendule.

Si entrée en échelon : $C_e(t) = cte \quad (> m.g.L/2)$

- *le pendule tourne indéfiniment*
- *l'angle de sortie θ tend vers l'infini*

système instable

Si entrée impulsionnelle : « *petite pichenette* »

La sortie ne diverge pas.

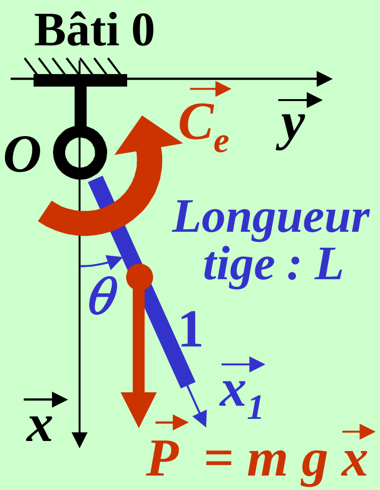
- *le pendule oscille indéfiniment*
- *l'angle de sortie θ reste borné*

stabilité au sens large

Plusieurs définitions de stabilité

5ème exemple

Exemple d'un pendule rigide (avec frottement dans la pivot) :



On suppose maintenant que la liaison pivot n'est plus parfaite (présence de frottement).

Si entrée impulsionnelle :

« *Petite pichenette* » au niveau du couple d'entrée **C_e**.

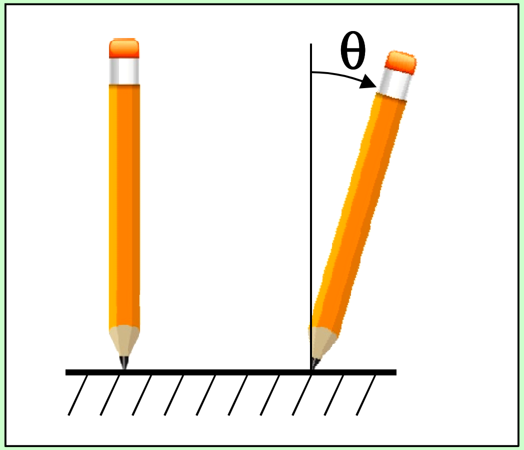
➡ *le pendule se met à osciller mais l'amplitude des oscillations diminuent.*

A cause du frottement

➡ *l'angle de sortie θ tend vers 0*

stabilité asymptotique

Absence de frottement	➡	stabilité au sens large
Avec frottement	➡	stabilité asymptotique



Soit un crayon posé sur une table en équilibre verticalement sur sa pointe.

6ème exemple

Si on lui applique un petit couple constant (entrée bornée) :

➡ *l'équilibre est instable dans le sens où le crayon va tomber sur la table et ne pas revenir à sa position initiale.*

L'angle de sortie θ tend vers **π/2.**

➡ *le « système » est quand même considéré comme stable au sens large dans la mesure où l'angle de sortie θ ne diverge pas.*

« A entrée bornée correspond une sortie bornée. »

C'est cette définition qui sera prise en compte pour l'étude de la stabilité des systèmes asservis.