CINEMATIQUE

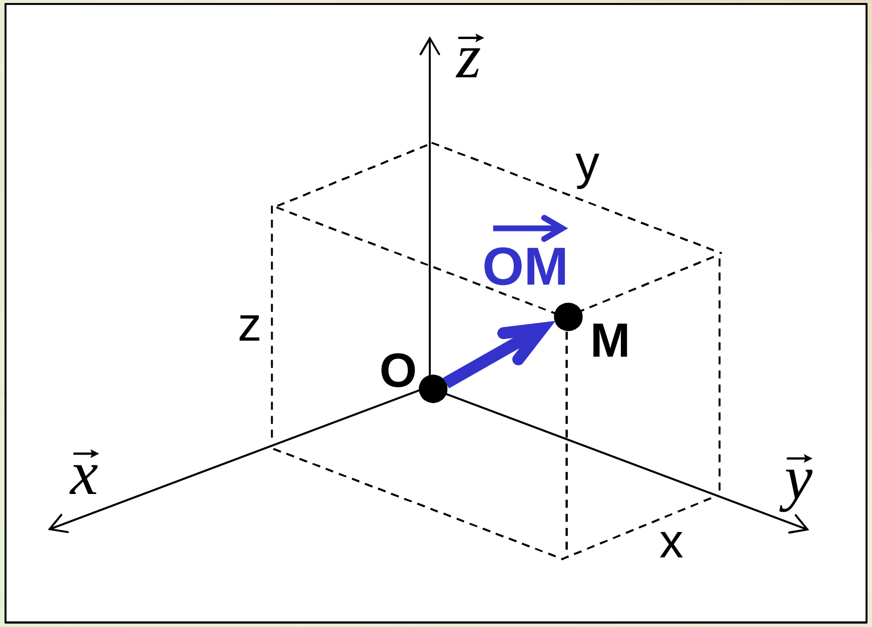
[1) Cinématique du point]

[2) Dérivation vectorielle]

[3) Cinématique du solide]

1) Cinématique du point

1-1) Point mobile par rapport à un repère R :



Fonctions du temps

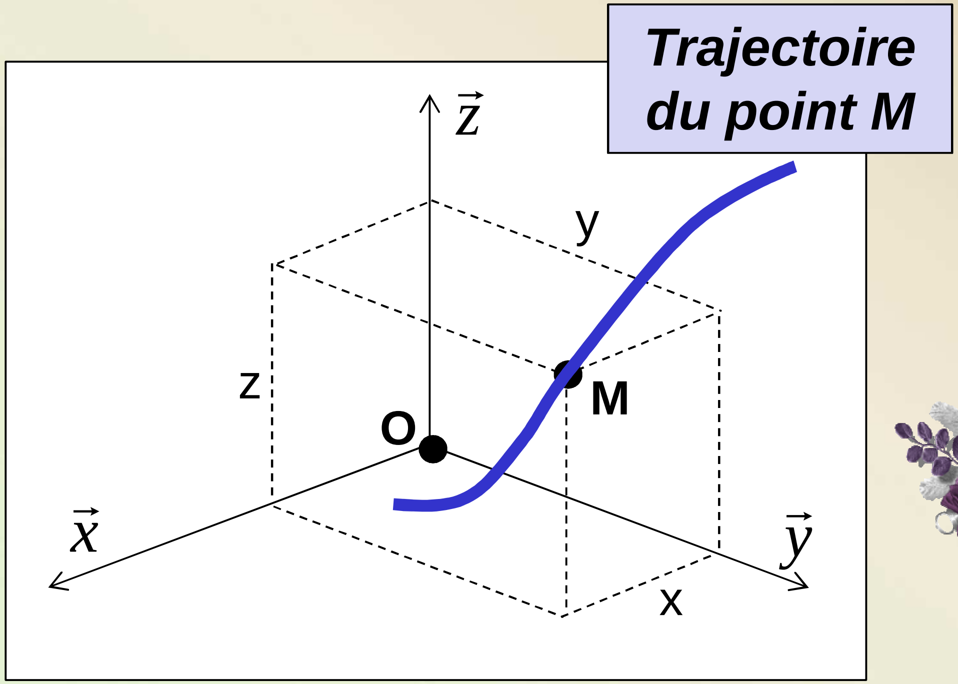
$$M = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_R$$

Soit le point M défini par ses trois coordonnées :
(cartésiennes par exemple)

On définit le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{x} + y(t)\,\vec{y} + z(t)\,\vec{z}$$

1-2) Trajectoire du point M :



Le lieu de l'espace décrit par M quand t varie est appelé la <u>trajectoire</u> du point M.

1-3) Vitesse du point M par rapport à un repère R :

Dérivation du vecteur position

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right]_{/R}$$

- ***il s'agit d'une vitesse instantanée et qui peut évoluer dans le temps.***
- ***O doit être un point fixe dans R.***

1-4) Accélération du point M par rapport à un repère R :

Dérivation du vecteur vitesse

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M/R}}\right]_{/R} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}\right]_{/R}$$

- ***il s'agit d'une accélération instantanée.***
- ***O doit être un point fixe dans R.***

2) Dérivation vectorielle

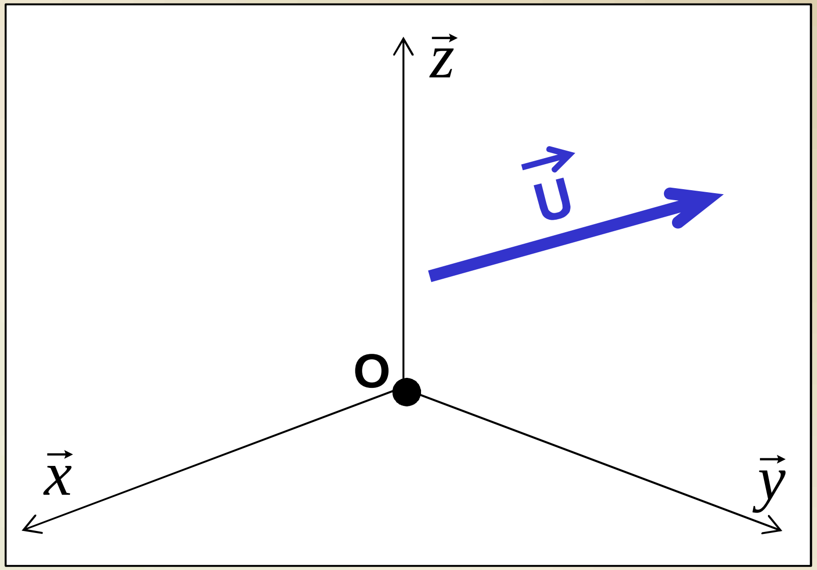
2-1) Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R :

Soit le repère R : $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$

Soit le vecteur $\vec{U}$ de composantes :

$$\vec{U}=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_R$$

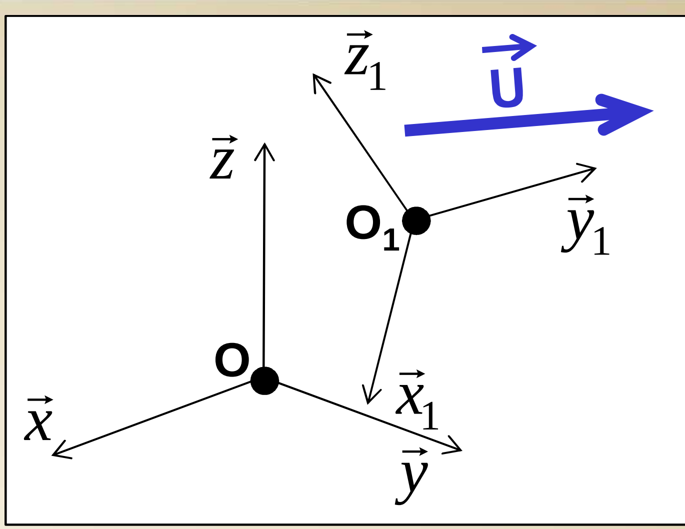
$\vec{U}$ est écrit dans R



$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R}=\frac{dx(t)}{dt}\times\vec{x}+\frac{dy(t)}{dt}\times\vec{y}+\frac{dz(t)}{dt}\times\vec{z}$$

$$=\dot{x}(t)\times\vec{x}+\dot{y}(t)\times\vec{y}+\dot{z}(t)\times\vec{z}=\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}_R$$

2-2) Changement de repère de dérivation d'un vecteur mobile :



Soient deux repères :

$$R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right) \quad \textit{et} \quad R_1\left(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1\right)$$

Soit le vecteur $\overrightarrow{U}$ écrit dans R_1 :

$$\overrightarrow{U} = x(t)\times\vec{x}_1 + y(t)\times\vec{y}_1 + z(t)\times\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{U}\right]_{/R_1} \qquad \overrightarrow{V}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{U}\right]_{/R} = \boxed{\left[\dot{x}(t)\times\vec{x}_1 + \dot{y}(t)\times\vec{y}_1 + \dot{z}(t)\times\vec{z}_1\right]}$$

$$+ \boxed{\left[x(t)\times\left(\frac{d\,\vec{x}_1(t)}{dt}\right)_{/R} + y(t)\times\left(\frac{d\,\vec{y}_1(t)}{dt}\right)_{/R} \; z(t)\times\left(\frac{d\,\vec{z}_1(t)}{dt}\right)_{/R}\right]}$$

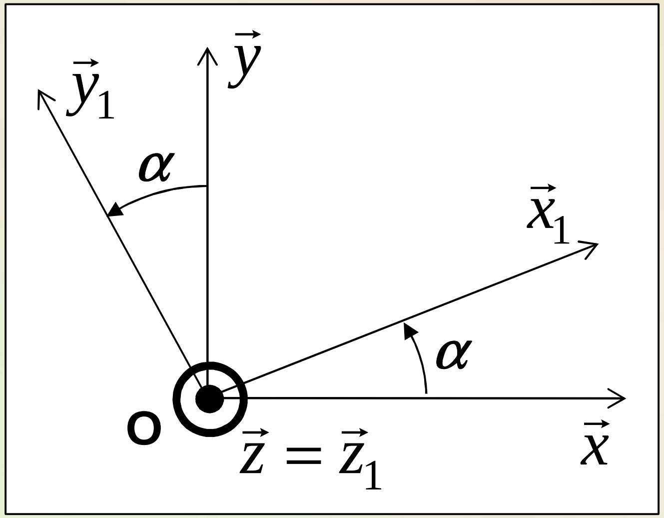
$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} + \vec{V}$$

avec : $$\vec{V} = \left[x(t)\times\left(\frac{d\,\vec{x}_1(t)}{dt}\right)_{/R} + y(t)\times\left(\frac{d\,\vec{y}_1(t)}{dt}\right)_{/R} \; z(t)\times\left(\frac{d\,\vec{z}_1(t)}{dt}\right)_{/R} \right]$$

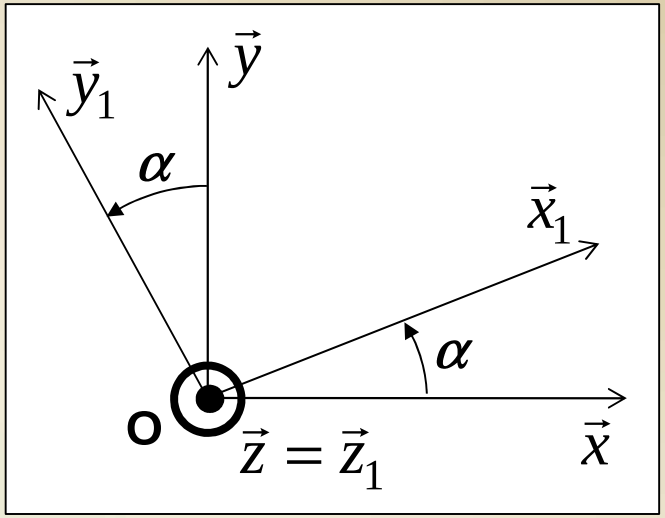
Plaçons-nous dans le cas particulier où la position du repère R_1 par rapport au repère R est définie par le seul angle α :

➡ ***rotation autour de l'axe*** $\vec{z} = \vec{z}_1$

➡ $$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos\alpha\,\vec{x} + \sin\alpha\,\vec{y} \\ \vec{y}_1 = -\sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{y} \\ \vec{z}_1 = \vec{z} \end{cases}$$



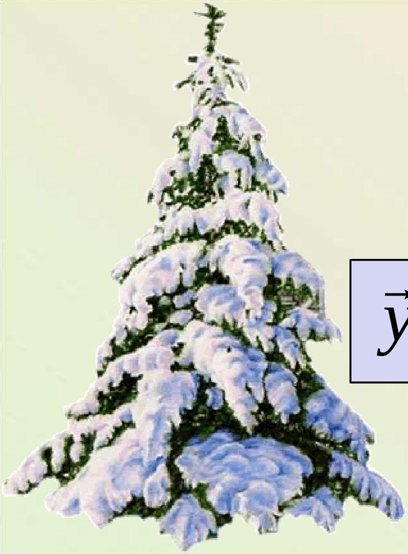
Calculons la dérivée de chaque vecteur unitaire du repère R_1 :



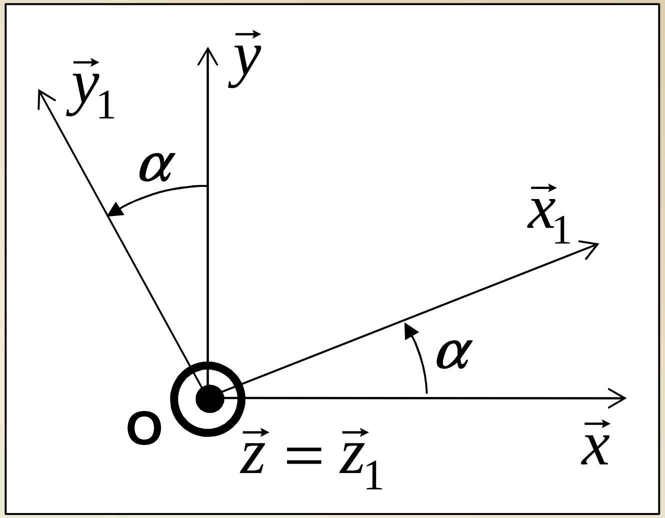
$$\vec{x}_1 = \cos\alpha\,\vec{x} + \sin\alpha\,\vec{y}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_{/R} = \left[\frac{d}{d\alpha}\vec{x}_1\right]_{/R} \times \underbrace{\frac{d\alpha}{dt}}_{\dot{\alpha}} = \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\cos\alpha\,\vec{x} + \sin\alpha\,\vec{y}\right)\right]_{/R} \times \dot{\alpha}$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(-\sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{y}\right)}}_{\vec{y}_1} \times \dot{\alpha} = \dot{\alpha}\,\vec{y}_1 \Rightarrow \boxed{\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_{/R} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1}$$



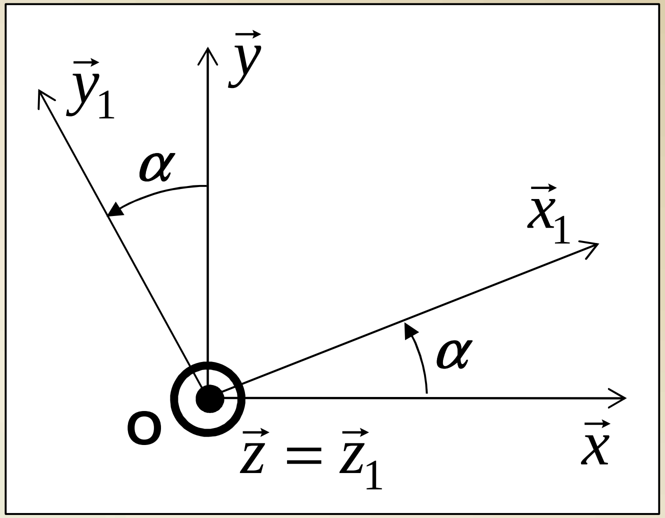
$$\vec{y}_1 = -\sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{y}$$



$$\left[\frac{d}{dt}\,\vec{y}_1\right]_{/R} = \left[\frac{d}{d\alpha}\,\vec{y}_1\right]_{/R} \times \frac{d\alpha}{dt} = \left[\frac{d}{d\alpha}\left(-\sin\alpha\,\vec{x} + \cos\alpha\,\vec{y}\right)\right]_{/R} \times \dot{\alpha}$$

$$= \underbrace{\boxed{\left(-\cos\alpha\,\vec{x} - \sin\alpha\,\vec{y}\right)}}_{-\vec{x}_1} \times \dot{\alpha} = -\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 \Rightarrow \boxed{\left[\frac{d}{dt}\,\vec{y}_1\right]_{/R} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1}$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}$$



$$\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}_1\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}\right]_{/R} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{d}{dt}\,\vec{z}_1\right]_{/R} = \dot{\alpha}\;\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} + \vec{V}$$

avec : $$\vec{V} = \left[x(t)\times\left(\frac{d\,\vec{x}_1(t)}{dt}\right)_{/R} + y(t)\times\left(\frac{d\,\vec{y}_1(t)}{dt}\right)_{/R} \quad z(t)\times\left(\frac{d\,\vec{z}_1(t)}{dt}\right)_{/R}\right]$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}_1\right]_{/R} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 \qquad \left[\frac{d}{dt}\vec{y}_1\right]_{/R} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 \qquad \left[\frac{d}{dt}\vec{z}_1\right]_{/R} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = x(t)\times\left(\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1\right) + y(t)\times\left(\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1\right) + z(t)\times\left(\dot{\alpha}\,\vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1\right)$$

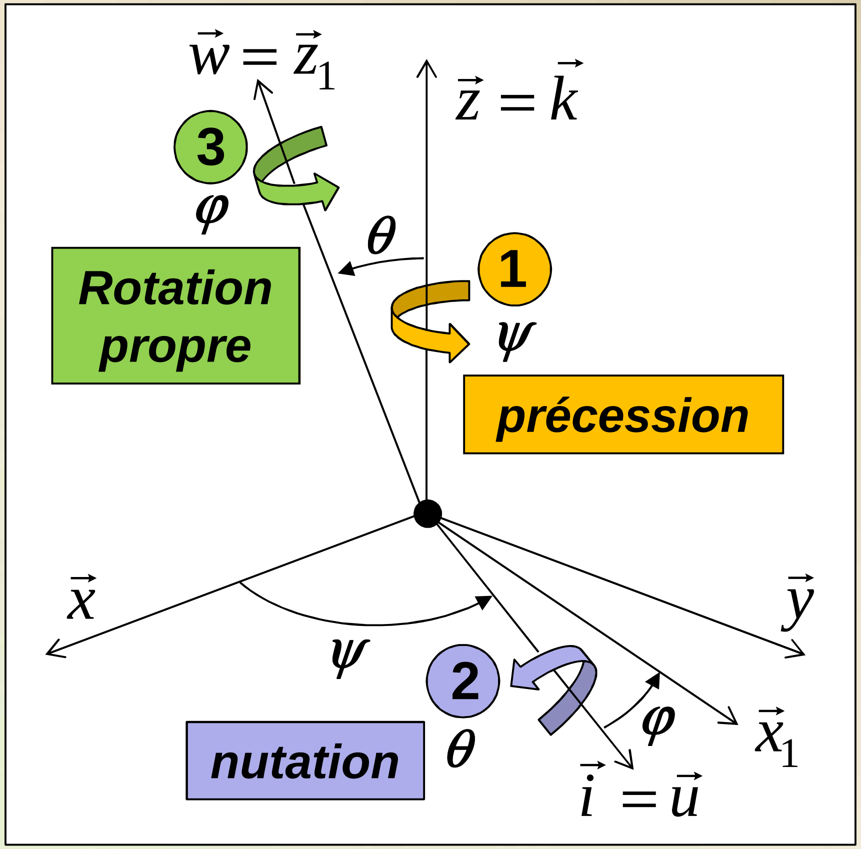
$$\Rightarrow \quad \vec{V} = \dot{\alpha}\,\underbrace{\boxed{\vec{z}_1}}_{=\vec{z}} \wedge \underbrace{\boxed{\left[x(t)\times\vec{x}_1 + y(t)\times\vec{y}_1 + z(t)\times\vec{z}_1\right]}}_{\vec{U}}$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = \dot{\alpha}\,\vec{z} \wedge \vec{U}}$$

En utilisant les angles d'Euler (pour orienter R_1 par rapport à R) et en généralisant le calcul précédent on obtient :

$$\vec{V} = \dot{\alpha}\ \vec{z} \wedge \vec{U}$$



$$\vec{V} = \left(\dot{\psi}\ \vec{z} + \dot{\theta}\ \vec{u} + \dot{\varphi}\ \vec{z}_1\right) \wedge \vec{U}$$

On a donc :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} + \vec{V}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} + \left(\dot{\psi}\ \vec{z} + \dot{\theta}\ \vec{u} + \dot{\varphi}\ \vec{z}_1\right) \wedge \vec{U}$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} + \left(\dot{\psi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}_1\right) \wedge \vec{U}$$

Définition : ***on appelle vecteur rotation de R_1 par rapport à R le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$***

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = \dot{\psi}\,\vec{z} + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z}_1$$

Ce vecteur rotation caractérise à tout instant l'orientation du repère R_1 par rapport à R c'est-à-dire qu'il précise :

- ***l'axe instantané autour duquel tourne R_1 par rapport à R.***
- ***la valeur de la vitesse angulaire instantanée en rad/s (sa norme).***
- ***le sens de la rotation (son signe) :*** $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} = -\overrightarrow{\Omega_{R/R_1}}$

Nota : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$ ***est indépendant d'un quelconque point d'application.***

On obtient ainsi la formule de changement de repère de dérivation

Formule de Bour

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{U}\right]_{/R_1} + \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}}}$$


FIN DE LA
PREMIERE
PARTIE

3) Cinématique du solide

3-1) Solide indéformable :

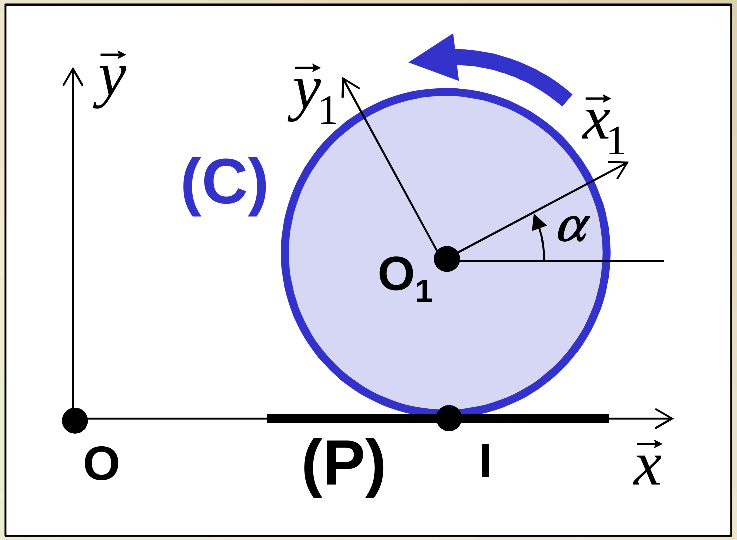
En cinématique on fait l'hypothèse que les solides sont indéformables :

- ***la distance entre deux points de ce solide reste constante au cours du temps.***
- ***la position d'un point quelconque M reste constante dans un repère affecté à ce solide.***
- ***on confond en général le repère affecté au solide et le solide lui-même.***

3-2) Points géométriques et matériels :

Un même point peut appartenir à plusieurs solides et donc avoir des vitesses différentes.

Exemple :



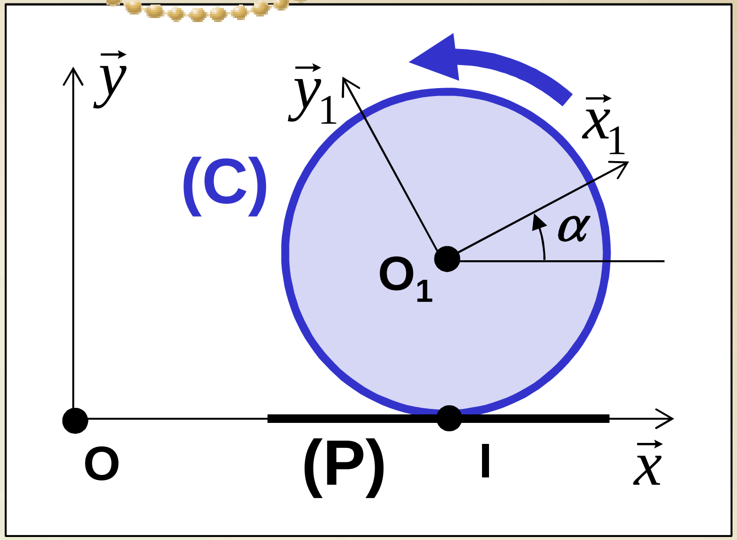
Soit un cylindre C (repère R_1) qui roule sur un plan fixe P (repère R).

On appelle I le point de contact entre C et P.

En I on a en fait trois points « différents » :

- *le point I matériel appartenant au cylindre en mouvement.*
- *le point I matériel appartenant au plan fixe.*
- *le point I géométrique qui traduit le contact cylindre/plan.*

Nota : *ces 3 points sont confondus seulement à l'instant t.*



Nota : $\overrightarrow{\Omega_{C/P}} = \dot{\alpha}\,\vec{z}$

On notera les différentes vitesses de la façon suivante :

$\overrightarrow{V_{I \in C/R}}$ ***vitesse du point matériel I appartenant à C par rapport à R***

$\overrightarrow{V_{I \in P/R}}$ ***vitesse du point matériel I appartenant à P par rapport à R***

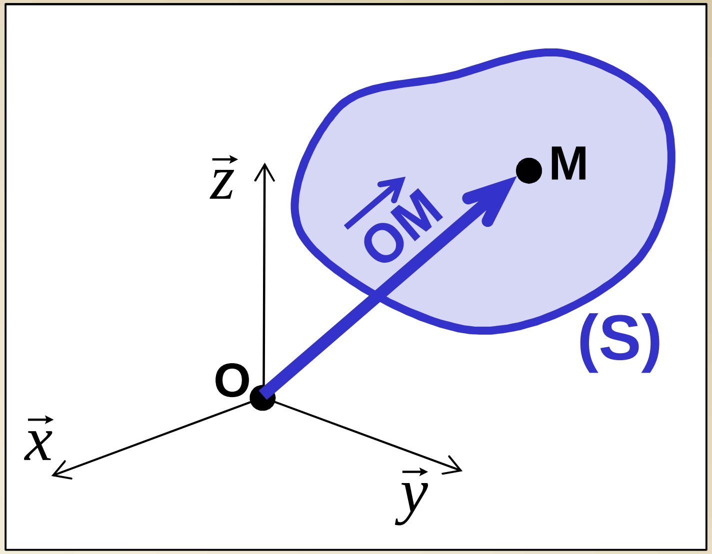
$\overrightarrow{V_{I/R}}$ ***vitesse du point géométrique I par rapport à R***

3-3) Vitesse d'un point appartenant à un solide :

Pour un point matériel quelconque M :

Dérivation du vecteur position

$$\overrightarrow{V_{M \in S/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right]_{/R}$$



▶ *il s'agit d'une vitesse instantanée et qui peut évoluer dans le temps.*

▶ *O doit être un point fixe dans R.*

3-4) Changement de point pour les vecteurs vitesses :

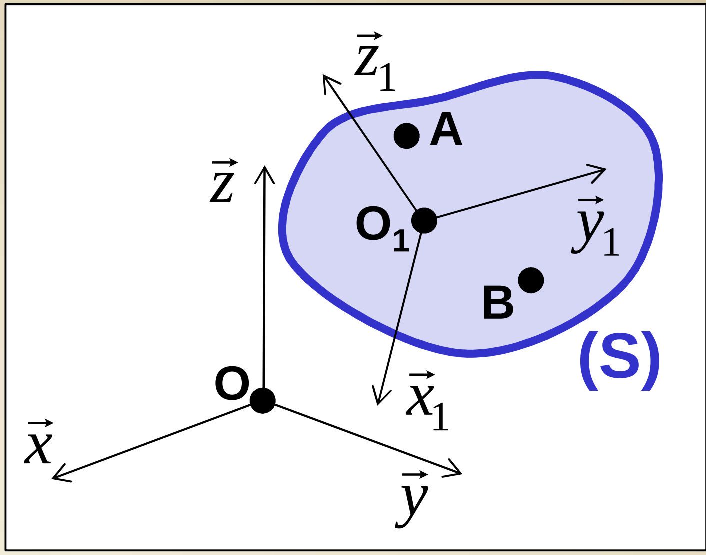
Un solide indéformable est un ensemble de points matériels dont on peut calculer, pour chacun, la vitesse en appliquant la dérivation vectorielle.

Toutefois la cinématique d'un solide en mouvement possède des particularités qui permettent une étude simplifiée du mouvement global sans avoir à étudier chaque point individuellement.

Cherchons la relation entre les vitesses de deux points A et B d'un même solide S en mouvement par rapport à un repère R.

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = f\left(\overrightarrow{V_{B\in S/R}}\right) ?}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = f\left(\overrightarrow{V_{B\in S/R}}\right) ?}$$



1) Formule de Bour :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{/R} = \cancel{\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{/R_1}} + \boxed{\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

$\vec{0}$ **car $\overrightarrow{AB}$ est fixe dans R_1**

2) Par ailleurs : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

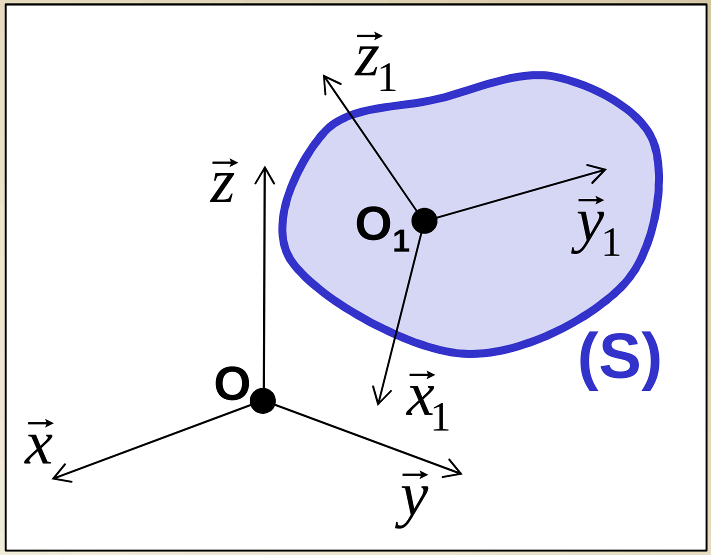
$$\Rightarrow \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_{/R} = -\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_{/R} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_{/R} = \boxed{-\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{V_{B\in S/R}}}$$

On en déduit : $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{V_{B\in S/R}}$

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{V_{B\in S/R}}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} - \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

(R_1 est le repère associé au solide S)



Formule de changement de point

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{BA}$$

ou alors

$$\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

3-5) Cas de la translation :

Pour un mouvement de translation du solide S/R on a :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0}}$$

D'où $\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}} \quad \forall t}$

Tous les points ont la même vitesse à un instant donné

Nota : ***cas de la translation circulaire.***

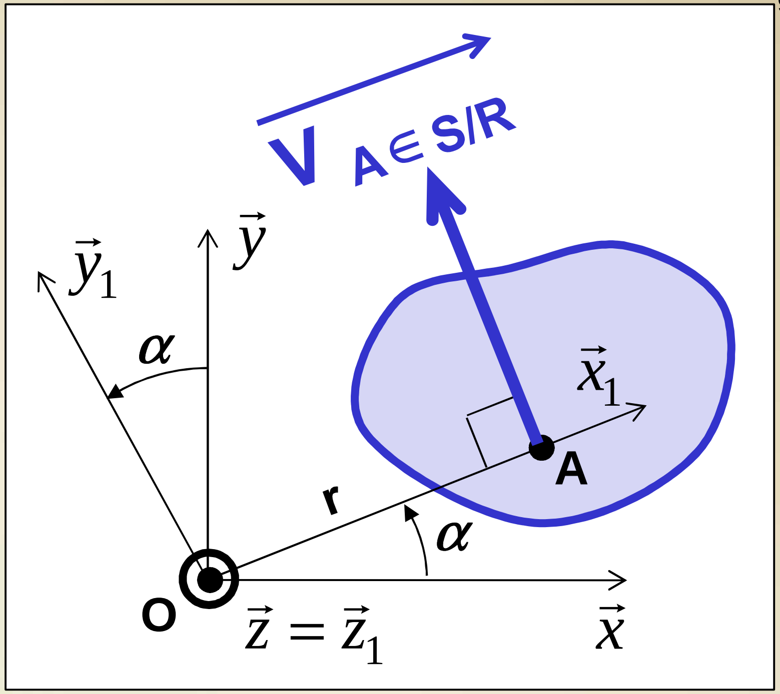
3-6) Cas de la rotation autour d'un axe fixe :

R_1 est le repère associé au solide S

$$\overrightarrow{OA} = r\,\vec{x}_1$$

Supposons une simple rotation autour de l'axe fixe $O\vec{z}$

$$\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \dot{\alpha}\,\vec{z} = \dot{\alpha}\,\vec{z}_1$$

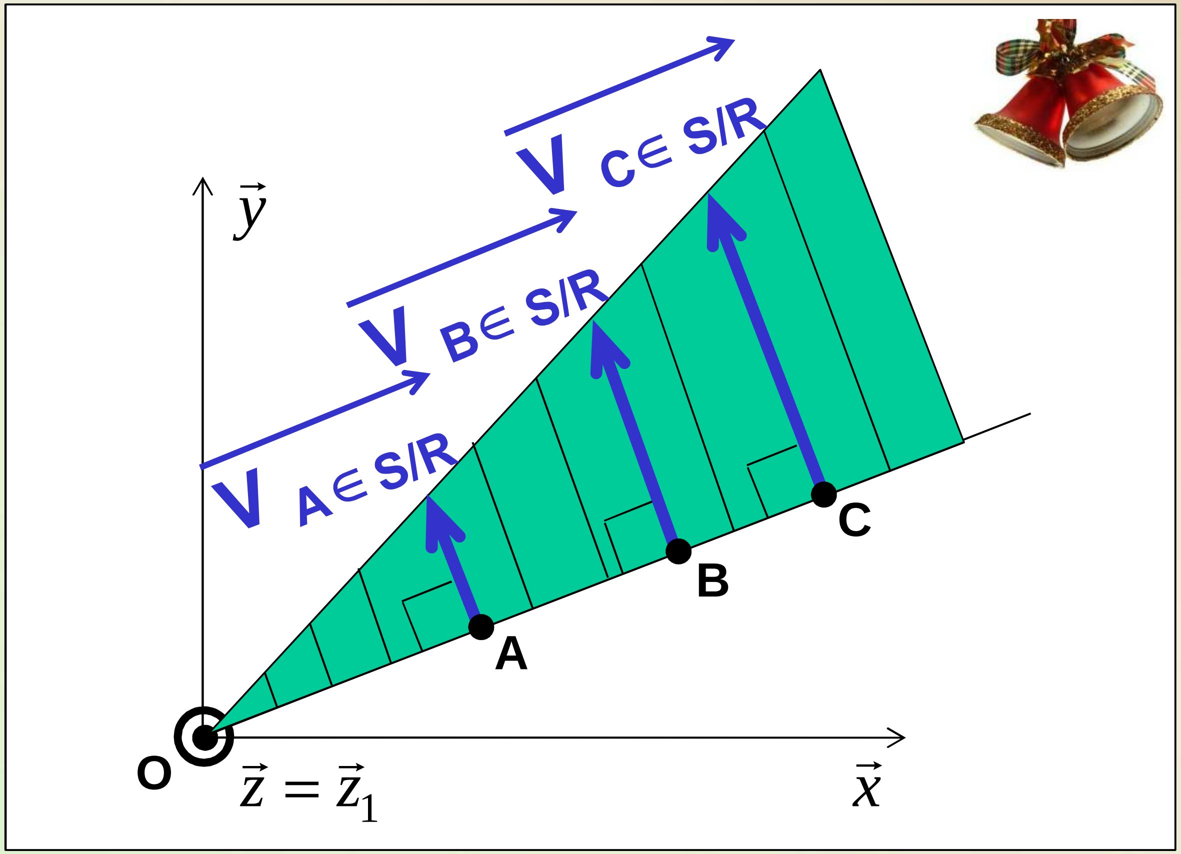


$$\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \cancel{\overrightarrow{V_{O\in S/R}}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = -r\,\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z}_1 = r\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

Pour une vitesse angulaire ω donnée, la vitesse d'un point est proportionnelle à l'éloignement du centre de rotation.

$$\Rightarrow \quad \boxed{"V = R\omega"}$$

$$"V = R\omega"$$

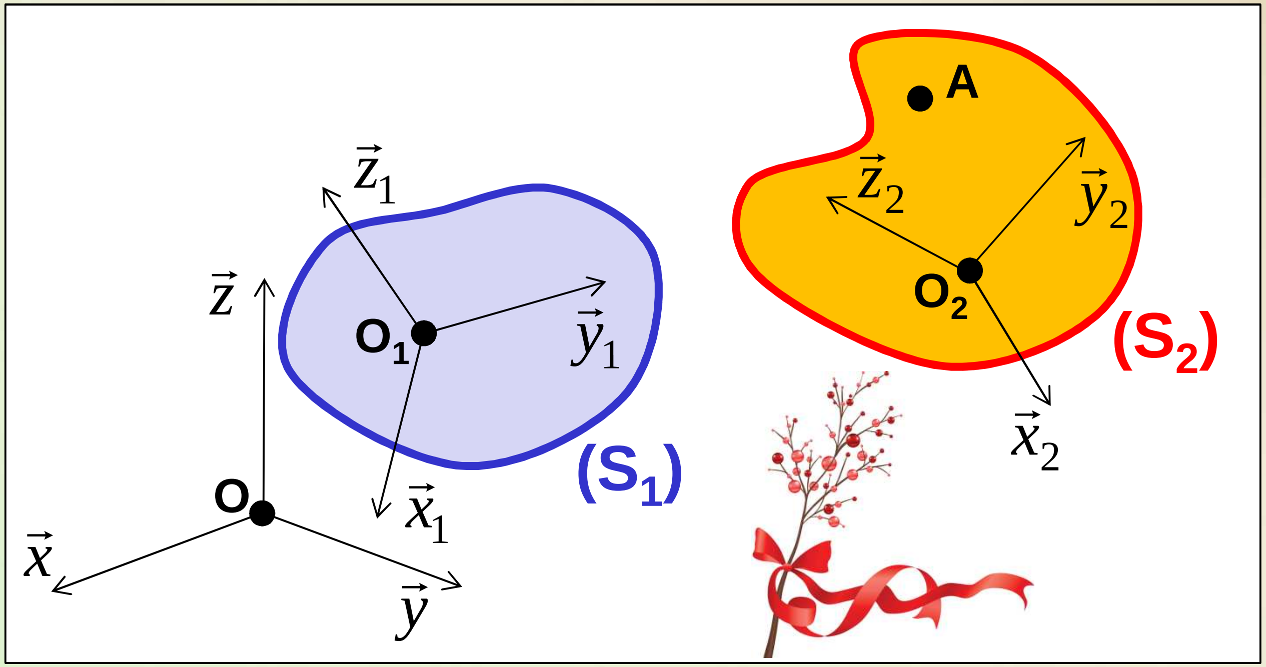


Un triangle traduit graphiquement la proportionnalité de la vitesse du point avec le rayon (pour une vitesse angulaire donnée).

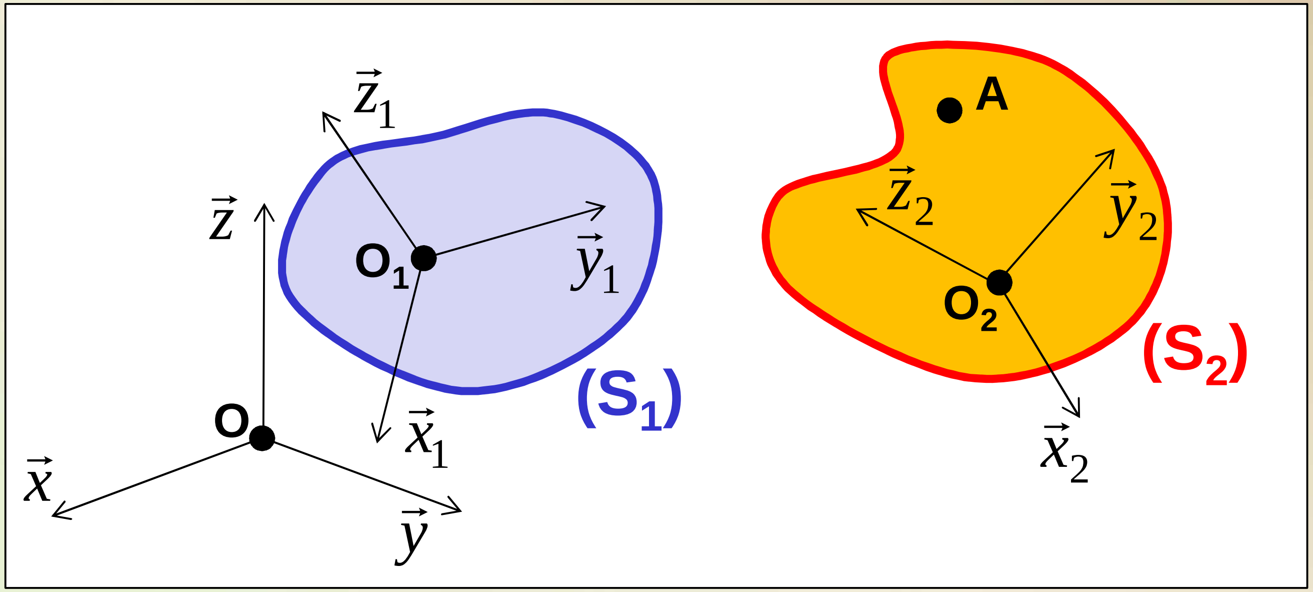

FIN DE LA
DEUXIEME PARTIE

3-7) Composition des vecteurs vitesses :

Soient deux solides S_1 (repère R_1) et S_2 (repère R_2) en mouvement l'un par rapport à l'autre et en mouvement par rapport au repère R.



$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in S_2/R}} = f\left(\overrightarrow{V_{A\in S_2/S_1}}\right) \;?}$$



$$\overrightarrow{V_{A\in S_2/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{/R} = \boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{/R}} + \boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right)_{/R}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in S_2/S_1}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{O_1\in S_1/R}}} \qquad \boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_{/R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1A}}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in S_2/R}} = \overrightarrow{V_{O_1\in S_1/R}} + \overrightarrow{V_{A\in S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

$$\overrightarrow{V_{A\in S_1/R}}$$

Formule de composition des vecteurs vitesses

$$\overrightarrow{V_{A\in S_2/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S_2/S_1}} + \overrightarrow{V_{A\in S_1/R}}$$

Vitesse absolue — ***Vitesse relative*** — ***Vitesse d'entraînement***

Cette formule se généralise en faisant une relation de Chasles sur les indices.

3-8) Composition des vecteurs rotation :

Utilisons trois fois la formule de Bour :

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_2} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} \wedge \vec{U} \quad (1)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_1} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{U} \quad (2)$$

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt}\vec{U}\right]_{/R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{U} \quad (3)$$

1 + 2 + 3 $\Rightarrow$ $\vec{0} = \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{U}$

$\Rightarrow$ $\vec{0} = \left(\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}\right) \wedge \vec{U}$

$$\vec{0} = \left(\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}\right) \wedge \vec{U}$$

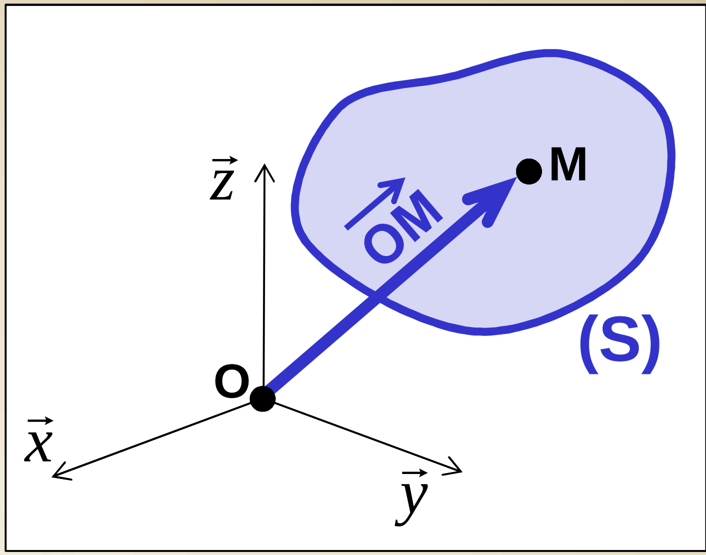
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_2}} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \vec{0}$$

Formule de composition des vecteurs rotation

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

Cette formule se généralise en faisant une relation de Chasles sur les indices.

3-9) Accélération d'un point appartenant à un solide :



Pour un point matériel quelconque M :

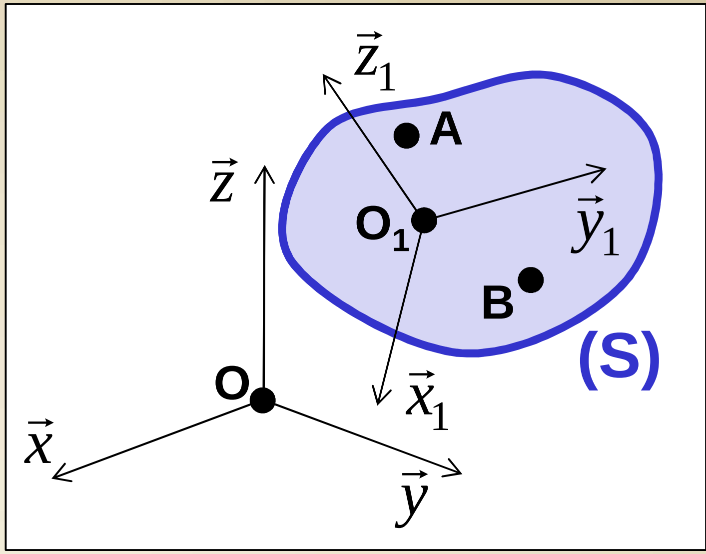
Dérivation du vecteur vitesse

$$\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M\in S/R}}\right]_{/R} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}\right]_{/R}$$

- ***il s'agit d'une accélération <u>instantanée</u> et qui peut évoluer dans le temps.***
- ***O doit être un point fixe dans R.***

3-10) Changement de point pour les vecteurs accélérations :

Soient deux points A et B d'un même solide S (associé au repère R_1) en mouvement par rapport à un repère R. Dérivons la formule de changement de point des vecteurs vitesses :



$$\overrightarrow{V_{B\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{B\in S/R}}\right)_{/R} = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right)_{/R} + \left(\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)\right)_{/R}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_{B\in S/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in S/R}} + \boxed{\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{BA}\right)_{/R}} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)_{/R}$$

$$\boxed{\cancel{\left[\frac{d\,\overrightarrow{BA}}{dt}\right]_{/S}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{BA}}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in S/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in S/R}} + \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)_{/R}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B\in S/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)_{/R} + \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

On ne retrouve pas une formule aussi « simple » que pour les vitesses

$$\boxed{\overrightarrow{V_{B\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}}$$

3-11) Composition des vecteurs accélérations :

Formule de composition des vecteurs vitesses :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}}$$

Dérivons cette expression :

$$\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in 2/0}}\right)_{/0} = \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}\right)_{/0} + \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}\right)_{/0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/0}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}\right)_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}}$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{V_{0_1\in 1/0}} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)\right)_{/0}}$$

<u>Formule de Bour</u>

<u>Changement de point</u>

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}}}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{0_1\in 1/0}} + \boxed{\left(\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)\right)_{/0}}$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{AO_1}\right)_{/0} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)_{/0}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right)_{/0}}$$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right)_{/1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1A}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 2/1}}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{0_1\in 1/0}} +$$

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right) + \overrightarrow{AO_1} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)_{/0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{0_1\in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right) + \overrightarrow{AO_1} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)_{/0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \boxed{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}} + \overrightarrow{\Gamma_{0_1\in 1/0}} + \boxed{\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right) + \overrightarrow{AO_1} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)_{/0}$$

On avait établi la formule de changement de point pour le vecteur accélération :

$$« \overrightarrow{\Gamma_{B\in S/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)_{/R} + \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} »$$

En posant 1 pour S, 0 pour R, A pour B et O_1 pour A on a :

$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{O_1\in 1/0}} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)_{/0} + \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AO_1}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

D'où la relation finale :

Formule de composition des vecteurs accélérations

$$\overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}} + 2\times\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in 2/1}}$$

Accélération absolue

Accélération relative

Accélération d'entraînement

Accélération de Coriolis

Hémisphère nord

(Guadeloupe)

Hémisphère sud

(Réunion)

FIN