

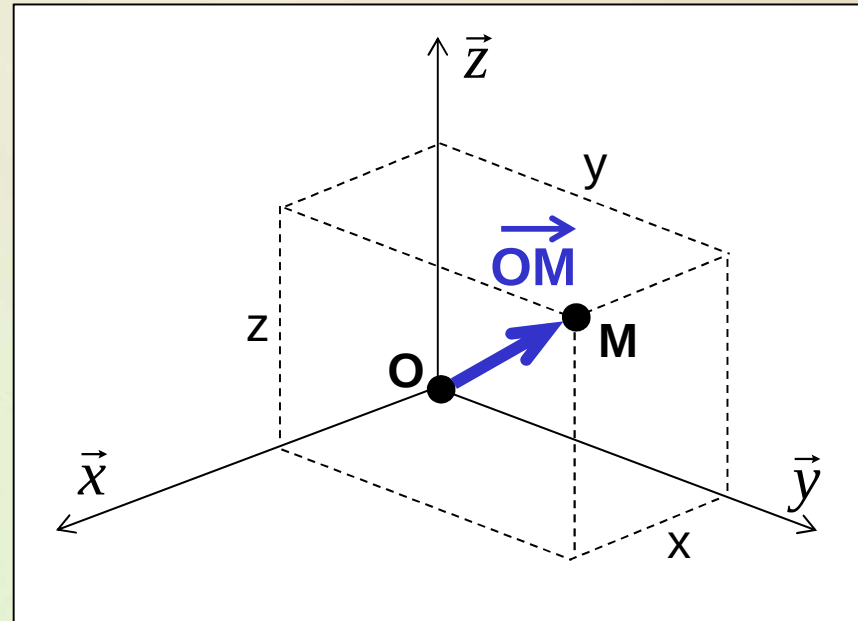
CINEMATIQUE

1) Cinématique du point

2) Dérivation vectorielle

1) Cinématique du point

1-1) Point mobile par rapport à un repère R :



**Fonctions
du temps**

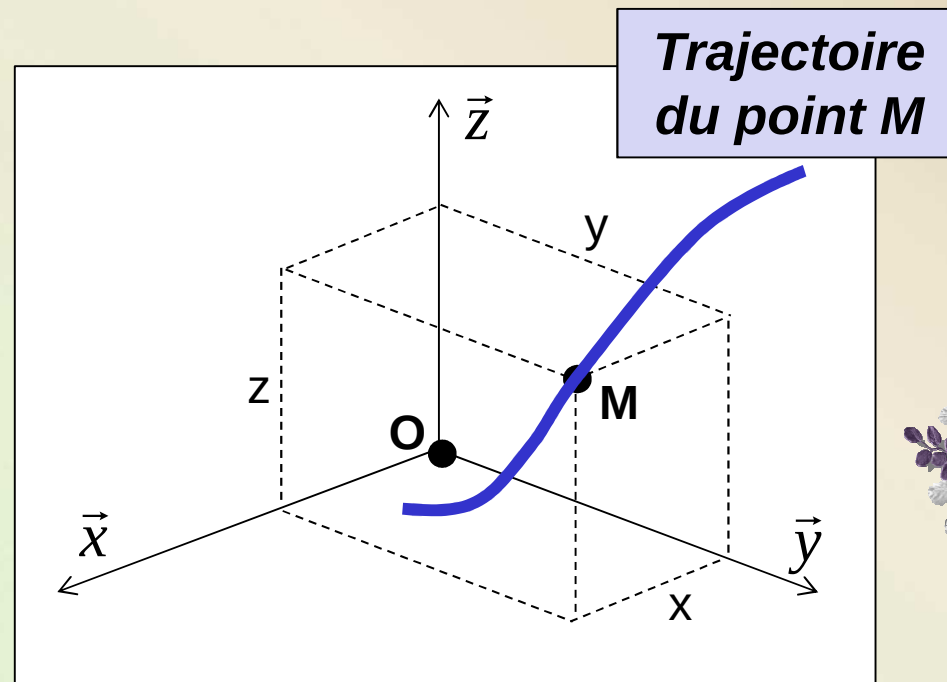
$$M = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_R$$

Soit le point M défini par ses trois coordonnées :
(cartésiennes par exemple)

On définit le vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{x} + y(t) \vec{y} + z(t) \vec{z}$$

1-2) Trajectoire du point M :



Le lieu de l'espace décrit par M quand t varie est appelé la trajectoire du point M .

1-3) Vitesse du point M par rapport à un repère R :

L'une des trois méthodes que nous utiliserons.

Dérivation du vecteur position

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} \right]_{/R}$$

Vecteur position :

- le point **O** est l'origine du repère **R**.
- le point **M** est le point dont on calcule la vitesse.

Cette barre signifie que l'on dérive par rapport à R et non pas que le résultat sera écrit dans R.



- *il s'agit d'une vitesse instantanée et qui peut évoluer dans le temps.*
- *O doit être un point fixe dans R.*

1-4) Accélération du point M par rapport à un repère R :

Dérivation du vecteur vitesse

Seule méthode que nous utiliserons.

Dérivée seconde
du vecteur position.

$$\overrightarrow{\Gamma}_{M/R} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V}_{M/R} \right]_{/R} = \left[\frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OM} \right]_{/R}$$

Dérivée première
du vecteur vitesse.

Dérivation vectorielle
par rapport au repère R .

► il s'agit d'une accélération instantanée.

► O doit être un point fixe dans R .



2) Dérivation vectorielle

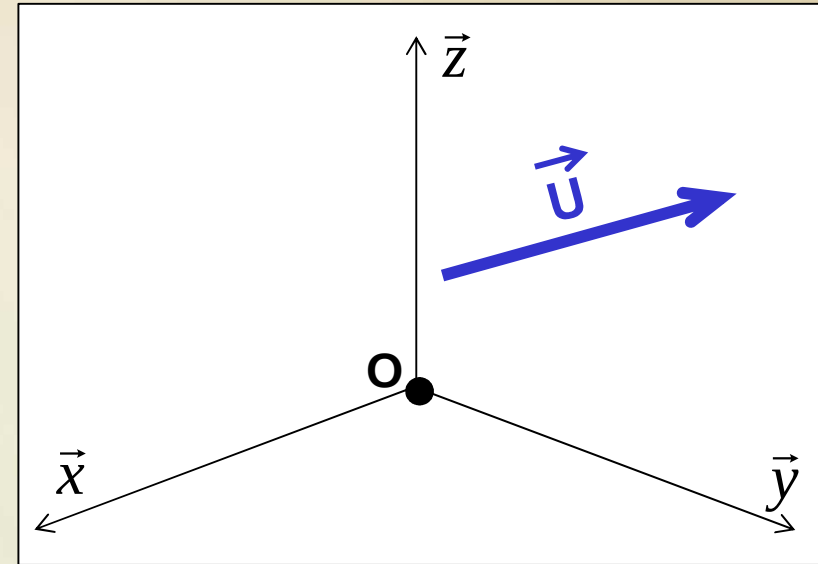
2-1) Dérivation d'un vecteur mobile par rapport à un repère R :

Soit le repère $R : R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Soit le vecteur $\vec{U}$ de composantes :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_R$$

$\vec{U}$ est écrit dans R



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \frac{dx(t)}{dt} \times \vec{x} + \frac{dy(t)}{dt} \times \vec{y} + \frac{dz(t)}{dt} \times \vec{z}$$

$$= \dot{x}(t) \times \vec{x} + \dot{y}(t) \times \vec{y} + \dot{z}(t) \times \vec{z} =$$

Vecteur écrit
dans R .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}_R$$

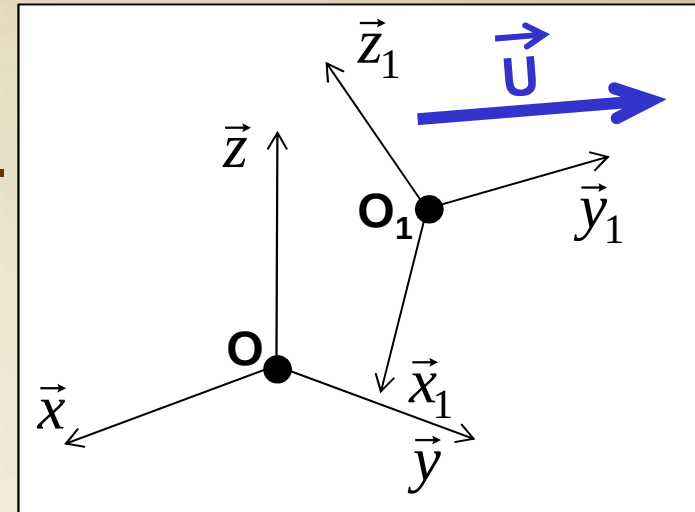
Dérivation vectorielle
par rapport au repère R .

2-2) Changement de repère de dérivation d'un vecteur mobile :

Soient deux repères :

$$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ et } R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

Soit le vecteur $\vec{U}$ écrit dans R_1 :



7/16

$$\vec{U} = x(t) \times \vec{x}_1 + y(t) \times \vec{y}_1 + z(t) \times \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{R_1}$$

On va utiliser : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

Vecteur écrit dans R_1 .

Dérivation par rapport à R_1 .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} &= \left[\dot{x}(t) \times \vec{x}_1 + \dot{y}(t) \times \vec{y}_1 + \dot{z}(t) \times \vec{z}_1 \right] \\ &+ \left[x(t) \times \left(\frac{d \vec{x}_1(t)}{dt} \right)_{/R} + y(t) \times \left(\frac{d \vec{y}_1(t)}{dt} \right)_{/R} + z(t) \times \left(\frac{d \vec{z}_1(t)}{dt} \right)_{/R} \right] \end{aligned}$$

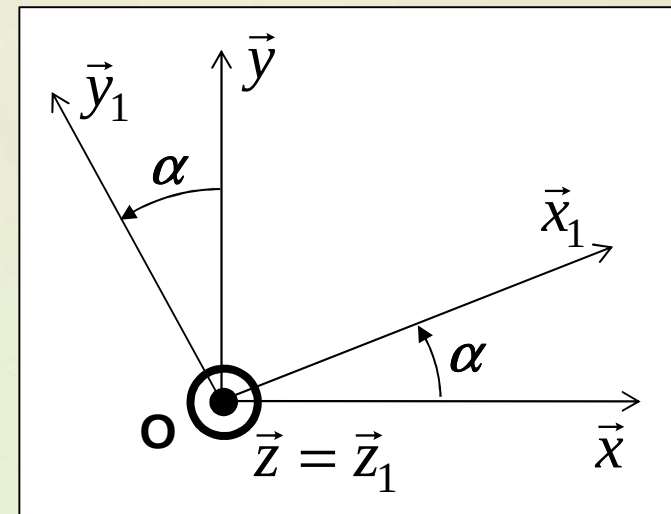
$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R_1} + \vec{V}$$

avec :
$$\vec{V} = \left[x(t) \times \left(\frac{d \vec{x}_1(t)}{dt} \right)_{/R} + y(t) \times \left(\frac{d \vec{y}_1(t)}{dt} \right)_{/R} + z(t) \times \left(\frac{d \vec{z}_1(t)}{dt} \right)_{/R} \right]$$

Plaçons-nous dans le cas particulier où la position du repère R_1 par rapport au repère R est définie par le seul angle α :

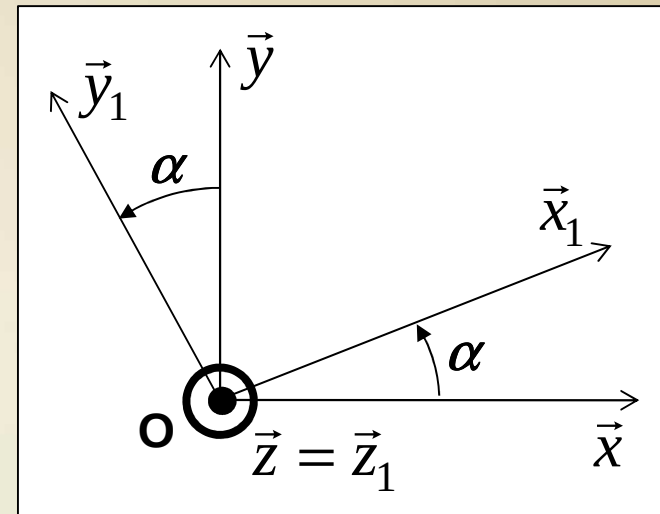
→ rotation autour de l'axe $\vec{z} = \vec{z}_1$

→
$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y} \\ \vec{y}_1 = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y} \\ \vec{z}_1 = \vec{z} \end{cases}$$



Calculons la dérivée de chaque vecteur unitaire du repère R_1 :

$$\vec{x}_1 = \cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}$$


 $\dot{\alpha}$

$$\left[\frac{d}{dt} (\vec{x}_1) \right]_{/R} = \left[\frac{d}{d\alpha} (\vec{x}_1) \right]_{/R} \times \frac{d\alpha}{dt} = \left[\frac{d}{d\alpha} (\cos \alpha \vec{x} + \sin \alpha \vec{y}) \right]_{/R} \times \dot{\alpha}$$

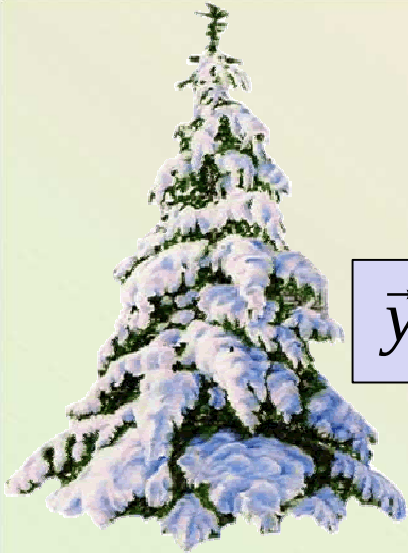
$$= (-\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y}) \times \dot{\alpha} = \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

 $\vec{y}_1$

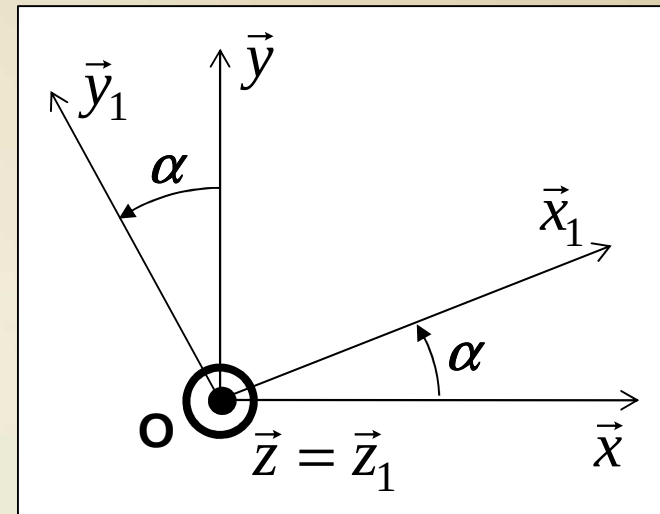
$$\vec{y}_1 = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{/R} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$$

Notation qui aura son intérêt par la suite...



$$\vec{y}_1 = -\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y}$$



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_{/R} = \left[\frac{d}{d\alpha} \vec{y}_1 \right]_{/R} \times \frac{d\alpha}{dt} = \left[\frac{d}{d\alpha} (-\sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{y}) \right]_{/R} \times \dot{\alpha}$$

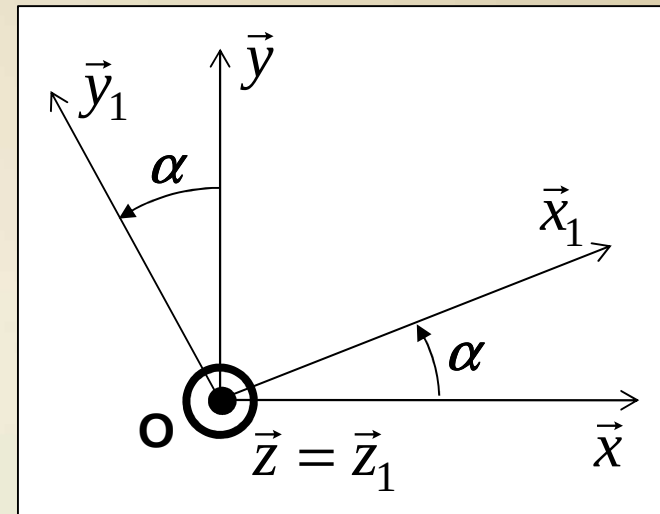
$$= (-\cos \alpha \vec{x} - \sin \alpha \vec{y}) \times \dot{\alpha} = -\dot{\alpha} \vec{x}_1 \rightarrow \left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_{/R} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1$$

$$-\vec{x}_1$$

Notation qui aura son intérêt par la suite...



$$\vec{z}_1 = \vec{z}$$



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{z} \right]_{/R} = \vec{0}$$



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_{/R} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1$$

Notation qui aura son intérêt par la suite...

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R_1} + \vec{V}$$

avec :
$$\vec{V} = \left[x(t) \times \left(\frac{d \vec{x}_1(t)}{dt} \right)_{/R} + y(t) \times \left(\frac{d \vec{y}_1(t)}{dt} \right)_{/R} + z(t) \times \left(\frac{d \vec{z}_1(t)}{dt} \right)_{/R} \right]$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{/R} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{y}_1 \right]_{/R} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{z}_1 \right]_{/R} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1$$

$$\rightarrow \vec{V} = x(t) \times (\dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1) + y(t) \times (\dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1) + z(t) \times (\dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_1)$$

$$\rightarrow \vec{V} = \dot{\alpha} \vec{z}_1 \wedge [x(t) \times \vec{x}_1 + y(t) \times \vec{y}_1 + z(t) \times \vec{z}_1]$$

$$\uparrow$$

$$= \vec{z}$$

$$\uparrow$$

$$\vec{U}$$



$$\vec{V} = \dot{\alpha} \vec{z} \wedge \vec{U}$$

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}_{R_1}$$

**En utilisant les angles d'Euler
(pour orienter R_1 par rapport à R)
et en généralisant le calcul
précédent on obtient :**

$$\vec{V} = (\dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}_1) \wedge \vec{U}$$

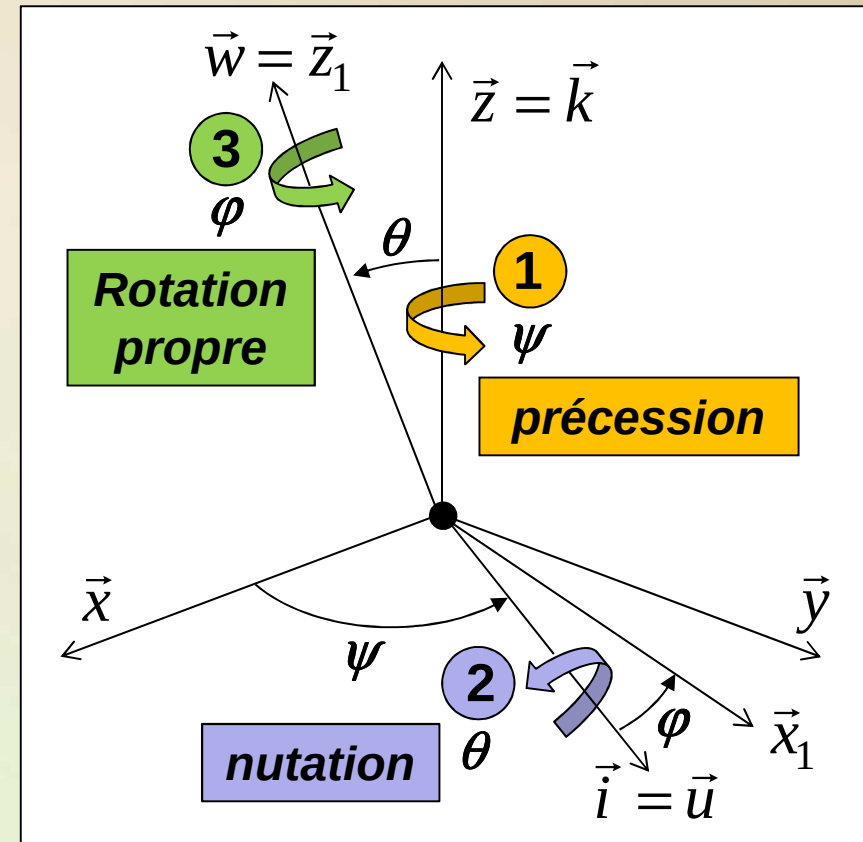
On a donc :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R_1} + \vec{V}$$



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R_1} + (\dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}_1) \wedge \vec{U}$$

$$\vec{V} = \dot{\alpha} \vec{z} \wedge \vec{U}$$



$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R_1} + (\dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}_1) \wedge \vec{U}$$

Définition : on appelle vecteur rotation de R_1 par rapport à R le vecteur $\vec{\Omega}$

$$\vec{\Omega}_{R_1/R} = \dot{\psi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\phi} \vec{z}_1$$



Ce vecteur rotation caractérise à tout instant l'orientation du repère R_1 par rapport à R c'est-à-dire qu'il précise :

- ▶ l'axe instantané autour duquel tourne R_1 par rapport à R .
- ▶ la valeur de la vitesse angulaire instantanée en rad/s (sa norme).
- ▶ le sens de la rotation (son signe) :

$$\vec{\Omega}_{R_1/R} = -\vec{\Omega}_{R/R_1}$$

Nota : $\vec{\Omega}_{R_1/R}$ est indépendant d'un quelconque point d'application.

On obtient ainsi la formule de changement de repère de dérivation

Formule de Bour

Vecteur rotation de
R par rapport à **R**₁.

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R} = \left[\frac{d}{dt} \vec{U} \right]_{/R_1} + \vec{U} \wedge \vec{\Omega}_{R/R_1}$$

Dérivation par
rapport à **R**.

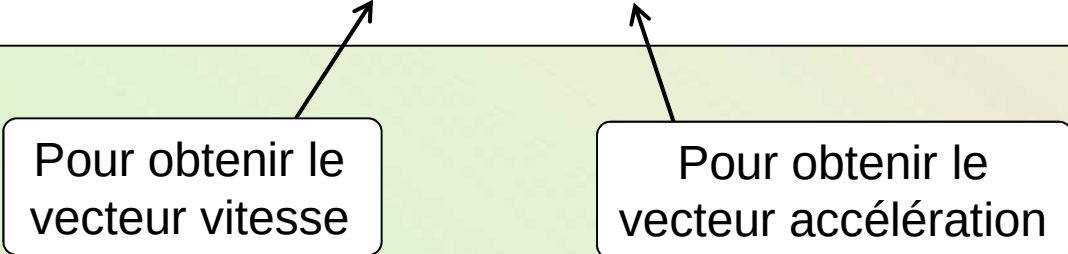
Dérivation par
rapport à **R**₁.



Ce qu'il faut avoir retenu (minimum « vital »...)

- ▶ Ce qu'est le vecteur position.
- ▶ Calculer un vecteur vitesse par dérivation du vecteur position.
- ▶ Calculer un vecteur accélération par dérivation du vecteur vitesse.
- ▶ Ce qu'est le vecteur rotation.
- ▶ Connaître la formule de changement de repère de dérivation ou formule de Bour.
- ▶ Avoir deux notations différentes pour écrire un vecteur (en colonne) **dans** une base et pour dériver un vecteur (position ou vitesse) **par rapport à** une base.

Pour obtenir le
vecteur vitesse



Pour obtenir le
vecteur accélération