
INTRODUCTION
CINEMATIQUE
GEOMETRIE VECTORIELLE

1) Vecteur, vecteur libre, vecteur lié

Un vecteur (libre ou lié) est un élément de l'espace vectoriel R^3

il peut être défini de manière unique par 3 grandeurs (composantes) dans une base donnée de cet espace vectoriel R^3

$$\begin{cases}\text{un vecteur libre n'est attaché à aucun point de l'espace.}\\ \text{un vecteur lié est attaché à un point de l'espace.}\end{cases}$$

Exemple : soit la base $(\vec{x}_0 , \vec{y}_0 , \vec{z}_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{AB} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0}$

Autre notation : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0\ \vec{y}_0\ \vec{z}_0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_0}}$

2) Norme d'un vecteur

Dans une base orthonormée $B\left(\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0\right)$ on définit la norme d'un vecteur la grandeur <u>positive</u> :

$$\overrightarrow{AB} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0 \;\Rightarrow\; \boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Le résultat est indépendant de la base d'écriture.

Une base est dite orthonormée quand :

les vecteurs la composant sont orthogonaux entre eux.
la norme de chacun de ses vecteurs vaut 1 (vecteurs unitaires).

3) Opérations sur les vecteurs

Somme de vecteurs :

Soient deux vecteurs exprimés dans la même base B_0 :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}_{B_0} \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_0}$$

$$\vec{U} + \vec{V} = (a_1 + a_2)\vec{x}_0 + (b_1 + b_2)\vec{y}_0 + (c_1 + c_2)\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}_{B_0}$$

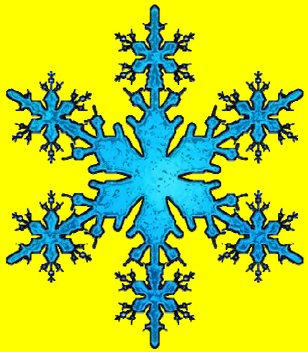
Nota : $\left\| \vec{U} + \vec{V} \right\| \neq \left\| \vec{U} \right\| + \left\| \vec{V} \right\|$

Multiplication par un scalaire :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_0}$$

$$\alpha \times \overrightarrow{AB} = \alpha \times \left(a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0 \right) = \alpha\, a\,\vec{x}_0 + \alpha\, b\,\vec{y}_0 + \alpha\, c\,\vec{z}_0$$

$$= \alpha \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{B_0} = \begin{bmatrix} \alpha\, a \\ \alpha\, b \\ \alpha\, c \end{bmatrix}_{B_0}$$



Nota : $\left\| \alpha \times \vec{U} \right\| = \alpha \times \left\| \vec{U} \right\|$ ***uniquement si α est positif ou nul***

Produit scalaire :

Le produit scalaire de deux vecteurs vaut :

$$\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = \left\|\vec{U}\right\| \times \left\|\vec{V}\right\| \times \cos\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)}$$

Le résultat d'un produit scalaire est un <u>réel</u>.

Autre expression si les deux vecteurs sont écrits dans la même base :

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}_{B_i} \qquad \vec{V} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_i} \Rightarrow \boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V} = a_1 \times a_2 + b_1 \times b_2 + c_1 \times c_2}$$

Le résultat est indépendant de la base d'écriture (<u>identique aux deux vecteurs</u>)

Propriétés du produit scalaire :

▶ **Distributivité par rapport à l'addition :**

$$\vec{U}\,.\left(\vec{V}+\vec{W}\right)=\vec{U}\,.\,\vec{V}+\vec{U}\,.\,\vec{W}$$

▶ **Symétrie :** $\boxed{\vec{U}\,.\,\vec{V}=\vec{V}\,.\,\vec{U}}$

▶ **Nullité :** ***le résultat d'un produit scalaire est un nul si :***

l'un des deux vecteurs est nul ou s'ils sont orthogonaux.

▶ **Signe du produit scalaire :** $\vec{U}\,.\,\vec{V}>0$ ***si*** $\left(\widehat{\vec{U},\vec{V}}\right)\in\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Cas d'un vecteur de norme unitaire :

Si $\left\|\vec{V}\right\| = 1$ **alors** $\vec{U}\,.\,\vec{V}$ **correspond à la projection en valeur algébrique de** $\vec{U}$ **sur** $\vec{V}$

Cas d'une base orthonormée directe :

Si $B_0(\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0)$ **est une base orthonormée directe alors :**

- $\vec{U} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0\,\vec{y}_0\,\vec{z}_0)}$ $\quad \vec{U} = a\,\vec{x}_0 + b\,\vec{y}_0 + c\,\vec{z}_0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{U}.\,\vec{x}_0 = a \\ \vec{U}.\,\vec{y}_0 = b \\ \vec{U}.\,\vec{z}_0 = c \end{cases}$
- $\vec{x}_0.\vec{x}_0 = 1 \qquad \vec{y}_0.\vec{y}_0 = 1 \qquad \vec{z}_0.\vec{z}_0 = 1$
- $\vec{x}_0.\vec{y}_0 = 0 \qquad \vec{y}_0.\vec{z}_0 = 0 \qquad \vec{x}_0.\vec{z}_0 = 0$

Produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur et vaut :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \left\{ \left\|\overrightarrow{U}\right\| \times \left\|\overrightarrow{V}\right\| \times \sin\left(\widehat{\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}}\right) \right\} \overrightarrow{W}$$

avec $\overrightarrow{W}$ ***le vecteur unitaire orthogonal au plan formé par*** $\overrightarrow{U}$ ***et*** $\overrightarrow{V}$

Autre expression si les deux vecteurs sont écrits dans la même base :

$$\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}_{B_0} \wedge \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}_{B_0} = \begin{bmatrix} b_1 \times c_2 - c_1 \times b_2 \\ c_1 \times a_2 - a_1 \times c_2 \\ a_1 \times b_2 - b_1 \times a_2 \end{bmatrix}_{B_0}$$

Propriétés du produit vectoriel :

- **Distributivité par rapport à l'addition :**

$$\boxed{\vec{U} \wedge \left(\vec{V} + \vec{W}\right) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}}$$

- **Antisymétrie :** $\boxed{\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}}$

- **Nullité : le résultat d'un produit vectoriel est nul si l'un des deux vecteurs est nul ou s'ils sont colinéaires.**

- $\vec{U} \wedge \vec{U} = \vec{0}$

- ***Si*** $B\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$ ***est une base orthonormée directe alors :***

$$\vec{x}_0 \wedge \vec{y}_0 = \vec{z}_0 \qquad \vec{y}_0 \wedge \vec{z}_0 = \vec{x}_0 \qquad \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_0 = \vec{y}_0$$

Double produit vectoriel :

$$\vec{U} \wedge \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) = \vec{V} \times \left(\vec{U} \cdot \vec{W}\right) - \vec{W} \times \left(\vec{U} \cdot \vec{V}\right)$$

Le résultat est un vecteur.

Produit mixte :

$$\vec{U} \cdot \left(\vec{V} \wedge \vec{W}\right) = \vec{V} \cdot \left(\vec{W} \wedge \vec{U}\right) = \vec{W} \cdot \left(\vec{U} \wedge \vec{V}\right)$$

Invariance par permutation circulaire.

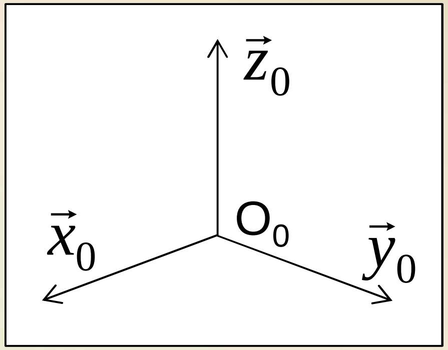
Le résultat est un scalaire.


FIN DE LA
PREMIERE PARTIE

4) Système de référence

En mécanique on se place dans un système constitué du temps et d'un espace physique :

- *le temps (noté t) permet de repérer tout instant par sa date.*
- *l'espace physique est associé à un repère* $R_0\left(0_0\,,\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0\right)$



Ce repère est défini par :

$\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{un point d'origine (centre du repère)}\\ \text{une base orthonormée directe } B_0\left(\vec{x}_0\,,\vec{y}_0\,,\vec{z}_0\right)\end{cases}$

On parle d'espace-temps, de référentiel, d'observateur ou de repère.

5) Solide indéformable

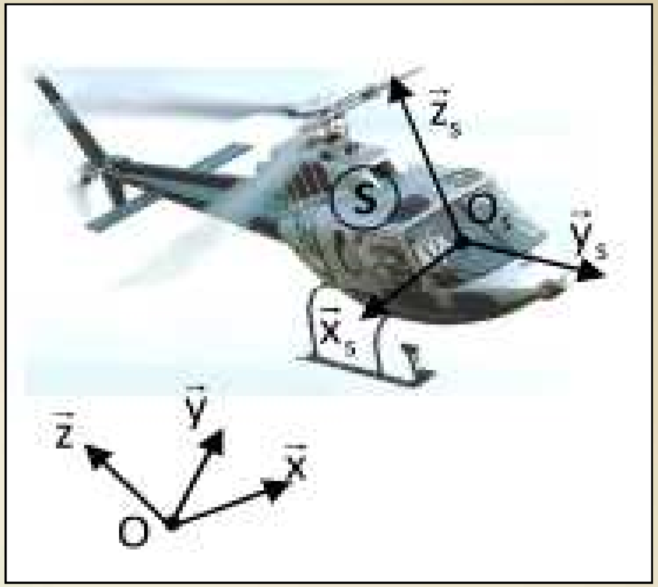
On considèrera toujours que les pièces mécaniques étudiées sont toutes indéformables.

Un solide est dit indéformable si quels que soient deux points A et B de ce solide

La distance AB reste constante au cours du mouvement ($\forall t$)

6) Paramétrage d'un point dans un repère

Pour définir la position d'un solide (S) dans un repère $R\left(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ ***il faut d'abord commencer par lier à ce solide un repère*** $R_S\left(0_S,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S\right)$ ***et ensuite définir la position de R_S par rapport à R :***

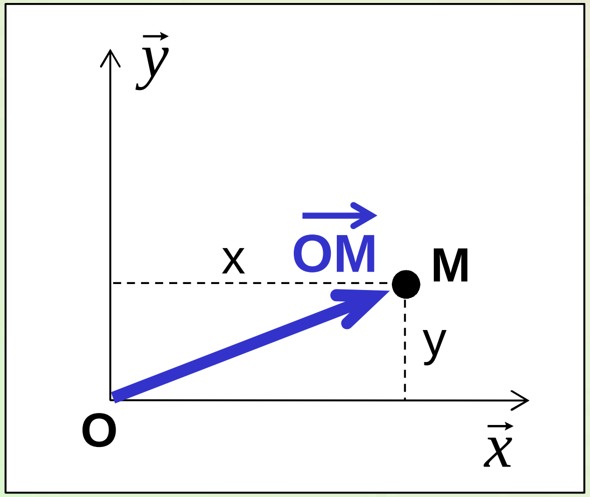


$$\Rightarrow \begin{cases} \textit{définir la position de l'origine } O_S \\ \textit{définir l'orientation de la base } B_S\left(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S\right) \end{cases}$$

Nota : ***comme le solide est supposé indéformable il y a équivalence entre le solide et son repère associé.***

Paramétrage dans le plan ➡ coordonnées cartésiennes

- ***Le problème se situe dans le plan*** $\left(\vec{x}\,,\vec{y}\right)$
- $R\left(0\,,\vec{x}\,,\vec{y}\right)$ ***est un repère orthonormé direct de ce plan.***
- ***La position d'un point M est définie par ses deux projections orthogonales sur chacun des axes.***



$$M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(\vec{x}\,\vec{y})}$$

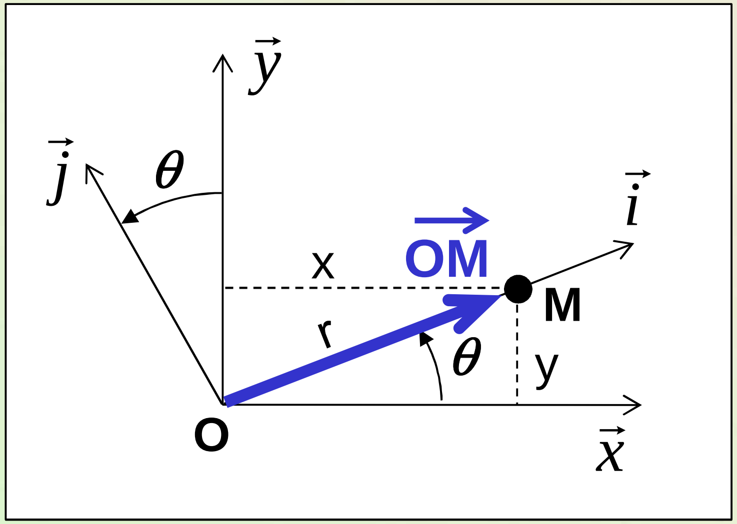
Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(\vec{x}\,\vec{y})}$$

Paramétrage dans le plan ➡ coordonnées polaires

- *Le problème se situe dans le plan* $(\vec{x}, \vec{y})$
- $R(0, \vec{x}, \vec{y})$ *et* $R'(0, \vec{i}, \vec{j})$ *sont deux repères orthonormés directs.*
- *La position d'un point M est définie par le rayon r et l'angle* θ



$$M\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j})}$$

$$M\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{x}\ \vec{y})}$$

Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{i} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j})}$$

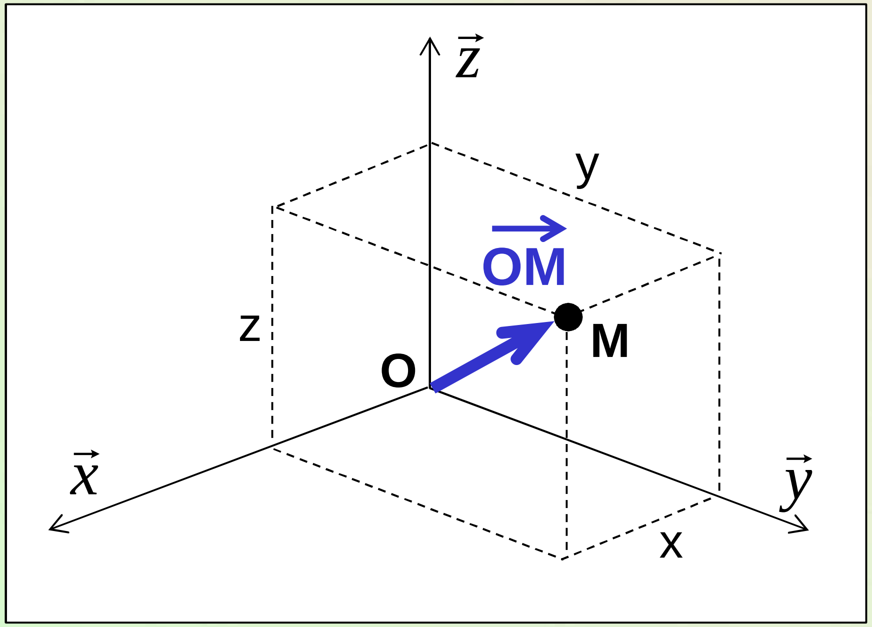
➡

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{x} + r\sin\theta\,\vec{y}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{x}\ \vec{y})}$$

Coordonnées cartésiennes (dans l'espace) :

- $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ***est un repère orthonormé direct.***
- ***La position d'un point M est définie par ses trois projections orthogonales sur chacun des axes.***



$$M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B$$

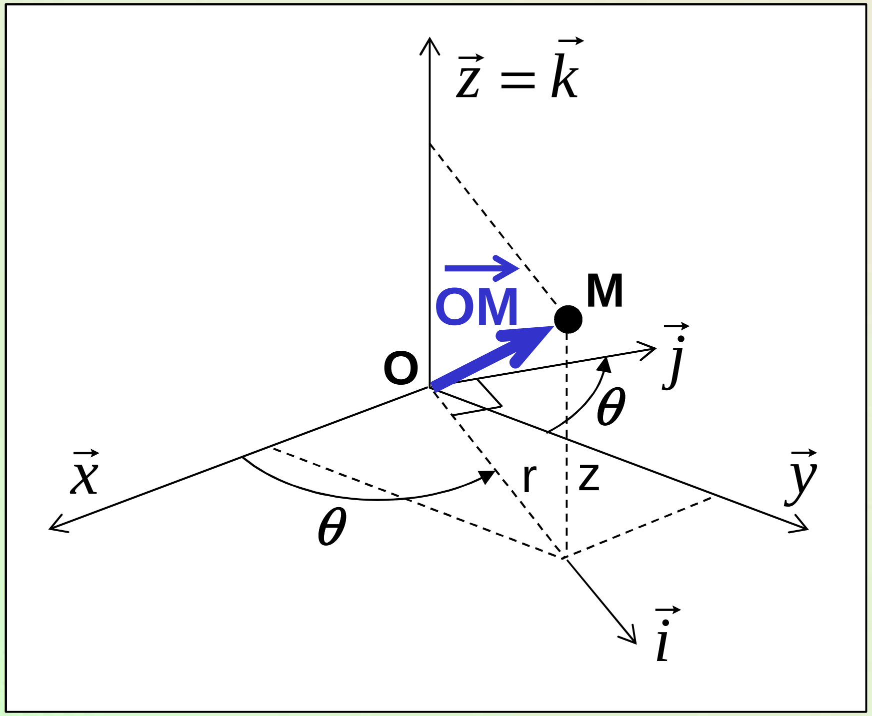
Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$$

Coordonnées cylindriques :

- $R\left(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ ***est un repère orthonormé direct.***
- ***La position d'un point M est définie par le rayon r l'angle θ et la hauteur z***

$$M\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})}$$



Vecteur position

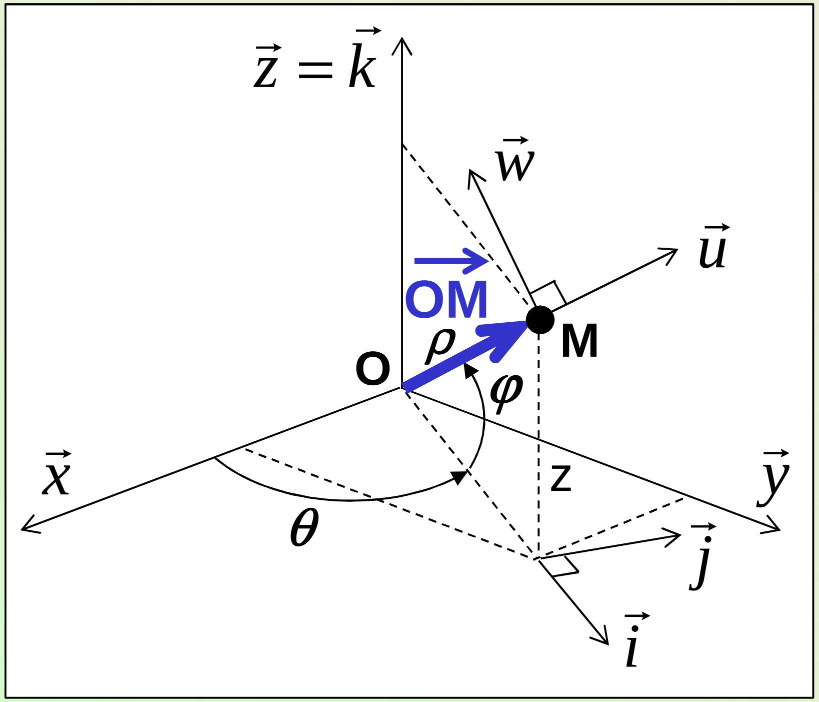
$$\overrightarrow{OM}=r\,\vec{i}+z\,\vec{k}=\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})}$$

$$\overrightarrow{OM}=r\cos\theta\,\vec{x}+r\sin\theta\,\vec{y}+z\,\vec{z}$$

$$=\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})}$$

Coordonnées sphériques (dans l'espace):

- $R\left(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ **est un repère orthonormé direct.**
- ***La position d'un point M est définie par le rayon ρ l'angle θ et l'angle φ***



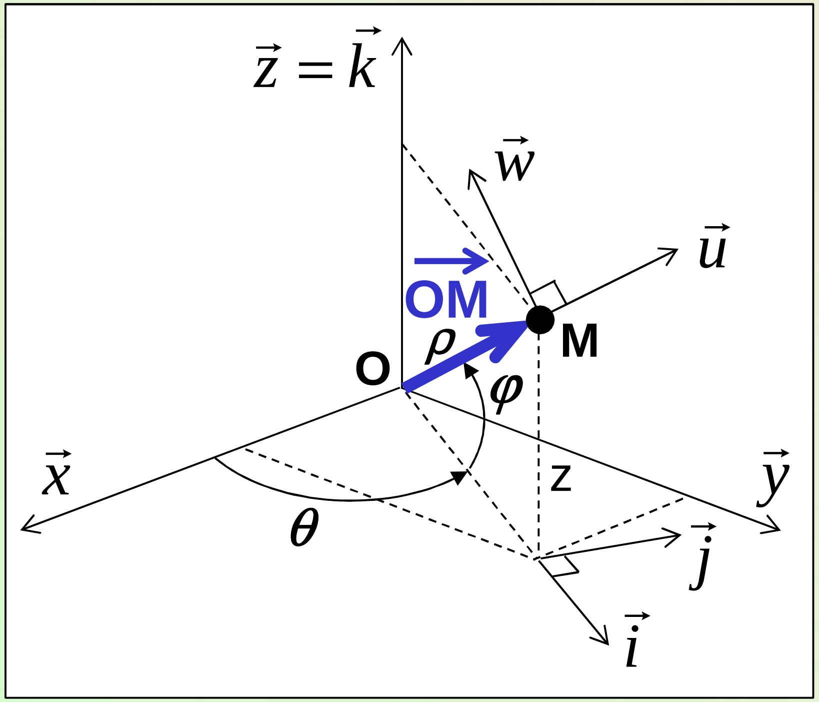
Vecteur position

Dans la base $B\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

$$\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}=\begin{bmatrix}\rho\\0\\0\end{bmatrix}_{(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w})}$$

Coordonnées sphériques (dans l'espace):

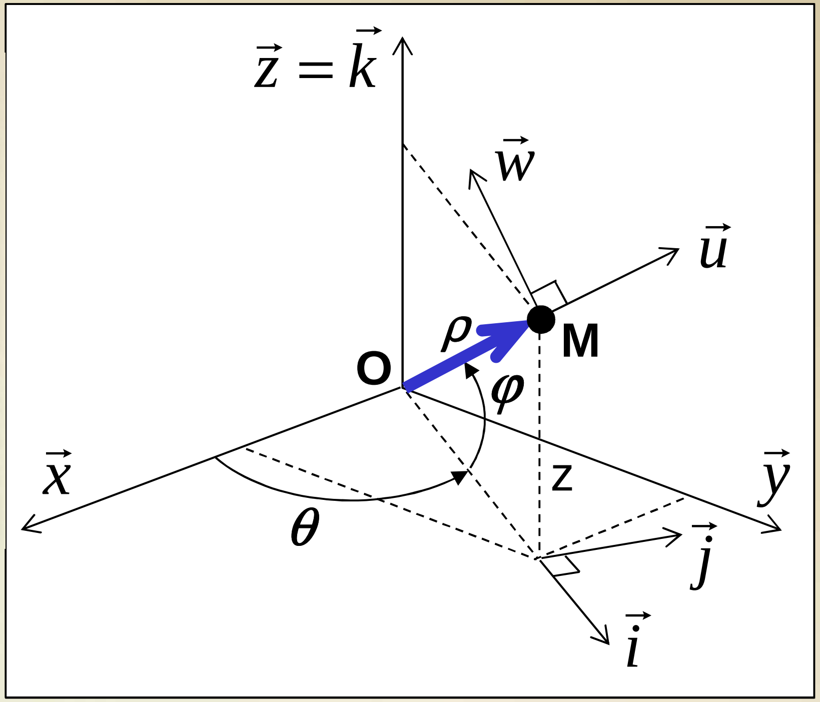
- $R\left(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ ***est un repère orthonormé direct.***
- ***La position d'un point M est définie par le rayon ρ l'angle θ et l'angle φ***



Dans la base $B\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$$\overrightarrow{OM}=\rho\cos\varphi\,\vec{i}+\rho\sin\varphi\,\vec{k}$$

$$=\begin{bmatrix}\rho\cos\varphi\\0\\\rho\sin\varphi\end{bmatrix}_{(\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k})}$$



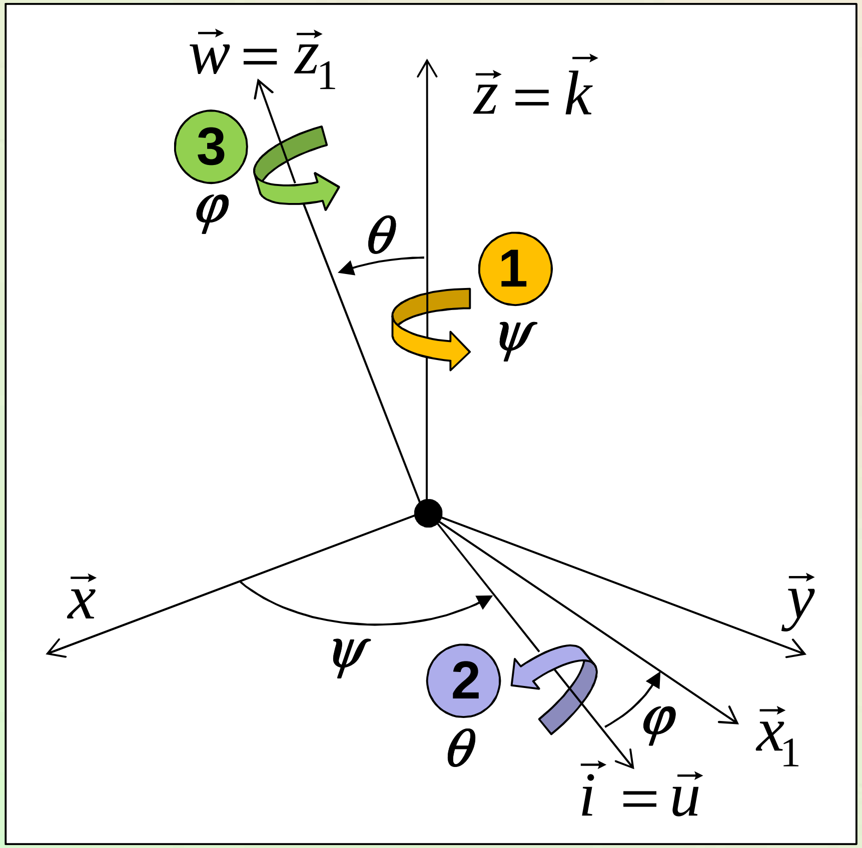
Dans la base $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\cos\theta\,\vec{x} + \rho\cos\varphi\sin\theta\,\vec{y} + \rho\sin\varphi\,\vec{z}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi\,\cos\theta \\ \rho\cos\varphi\,\sin\theta \\ \rho\sin\varphi \end{bmatrix}_{(\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z})}$$

7) Angles d'Euler

Toutes les bases sont orthonormées et directes.



$$B\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$$

Rotation de ψ autour de $\vec{z}$ — **précession**

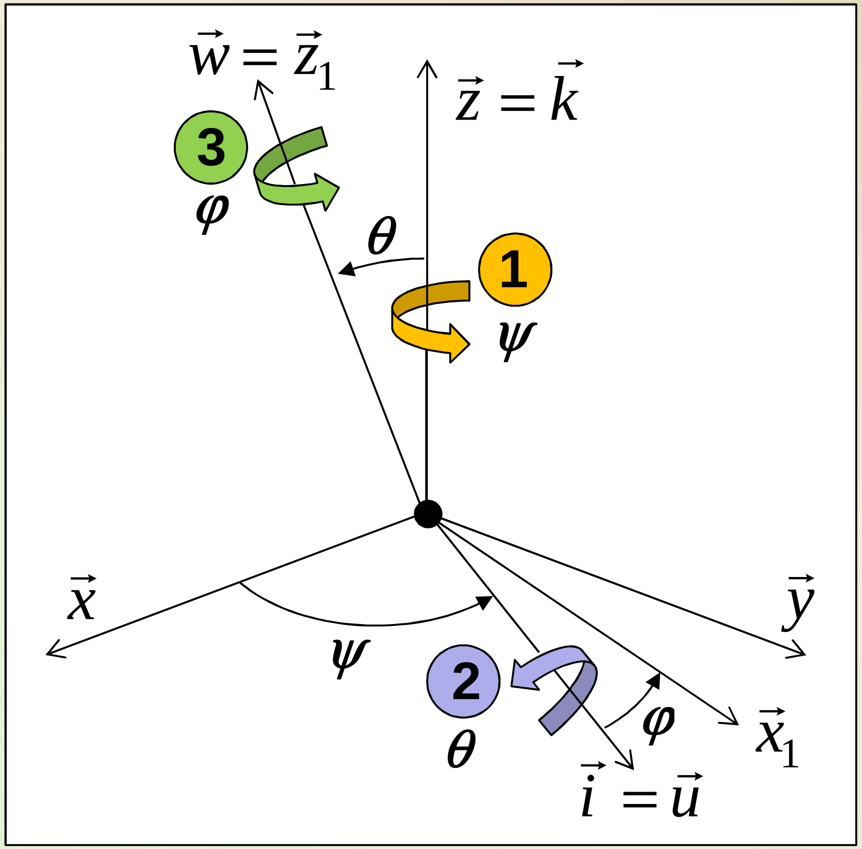
$$B\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right) \qquad \vec{z} = \vec{k}$$

Rotation de θ autour de $\vec{i}$ — **nutation**

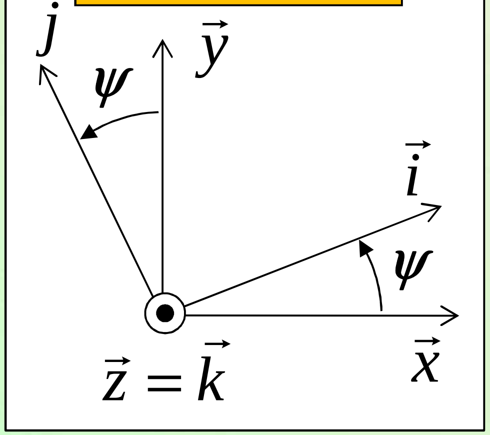
$$B\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) \qquad \vec{i} = \vec{u}$$

Rotation de φ autour de $\vec{w}$ — **rotation propre**

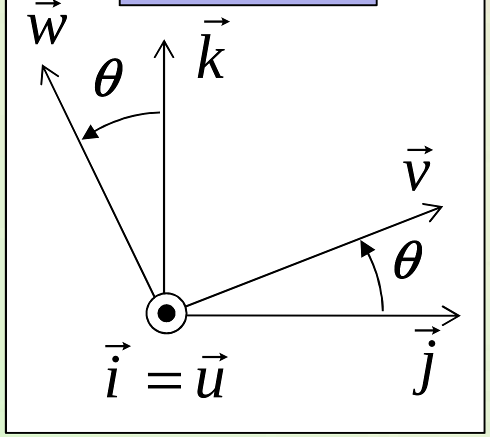
$$B\left(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1\right) \qquad \vec{w} = \vec{z}_1$$



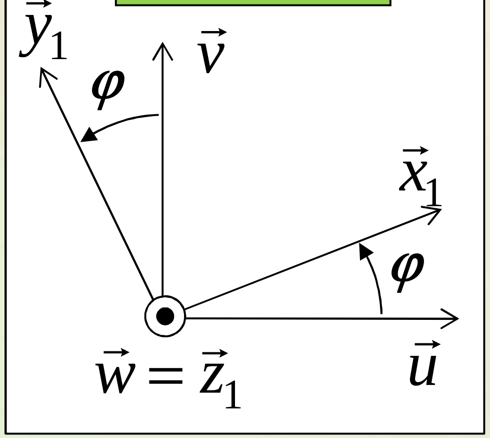
précession



nutation

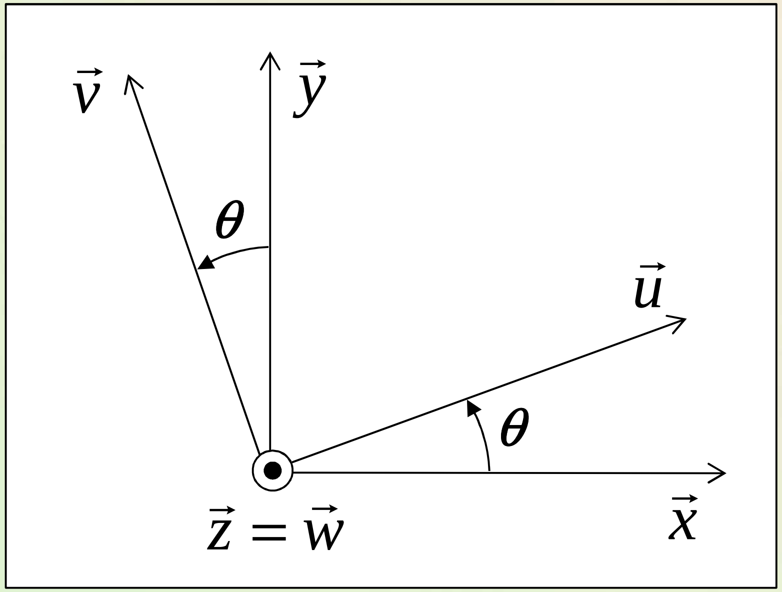


rotation propre



8) Exemples

▶ *Ecrire les vecteurs de la base* $B'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *dans la base* $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



▶ *Ecrire le vecteur* $\overrightarrow{U}$ *dans la base* $B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\overrightarrow{U} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w})}$$


FIN