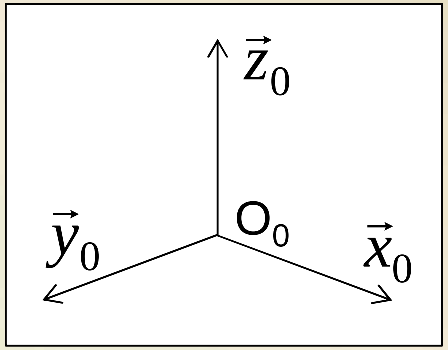
INTRODUCTION CINEMATIQUE

GEOMETRIE VECTORIELLE

4) Système de référence

En mécanique on se place dans un système constitué du temps et d'un espace physique :

- *le temps (noté t) permet de repérer tout instant par sa date.*
- *l'espace physique est associé à un repère* $R_0\left(0_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$



Ce repère est défini par :

un point d'origine (centre du repère)

une base orthonormée directe $B_0\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0\right)$

On parle d'espace-temps, de référentiel, d'observateur ou de repère.

5) Solide indéformable

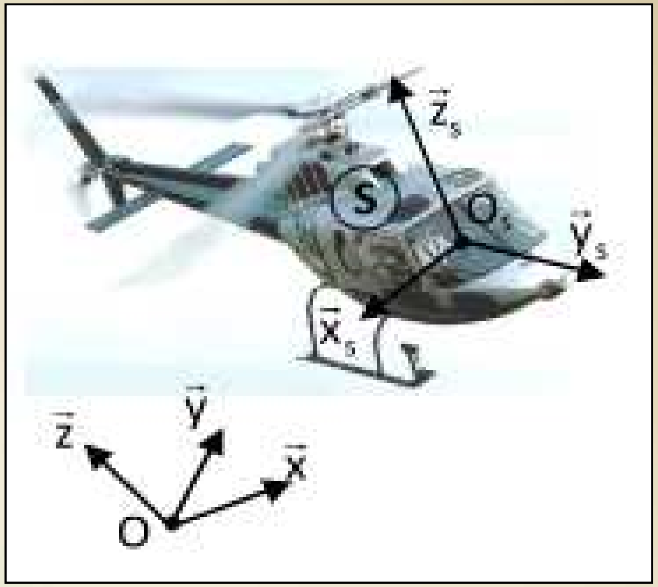
On considèrera toujours que les pièces mécaniques étudiées sont toutes indéformables.

Un solide est dit indéformable si quels que soient deux points A et B de ce solide

La distance AB reste constante au cours du mouvement ($\forall t$)

6) Paramétrage d'un point dans un repère

Pour définir la position d'un solide (S) dans un repère $R(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *il faut d'abord commencer par lier à ce solide un repère* $R_S(0_S,\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S)$ *et ensuite définir la position de R_S par rapport à R :*



$\Rightarrow \begin{cases} \textit{définir la position de l'origine } O_S \\ \textit{définir l'orientation de la base } B_S(\vec{x}_S,\vec{y}_S,\vec{z}_S) \end{cases}$

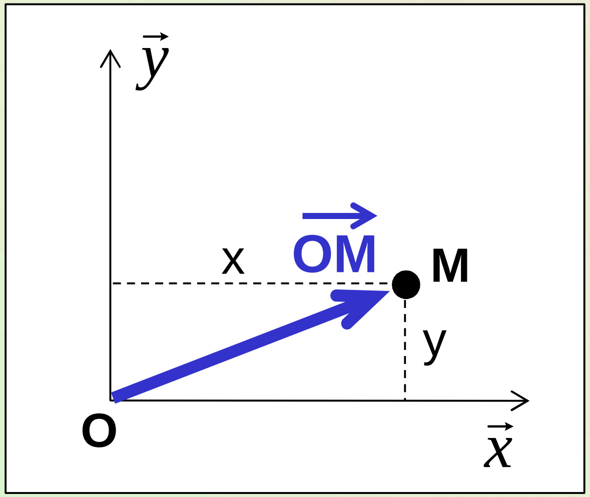
__Nota :__ *comme le solide est supposé indéformable il y a équivalence entre le solide et son repère associé.*

On « mélangera » un peu à tort et à travers dans nos sujets la base, le repère et la pièce associée…

Paramétrage dans le plan ➡ coordonnées cartésiennes

- ***Le problème se situe dans le plan*** $(\vec{x}, \vec{y})$
- $R(0, \vec{x}, \vec{y})$ ***est un repère orthonormé direct de ce plan.***
- ***La position d'un point M est définie par ses deux projections orthogonales sur chacun des axes.***

$$M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(\vec{x}\,\vec{y})}$$



Vecteur position

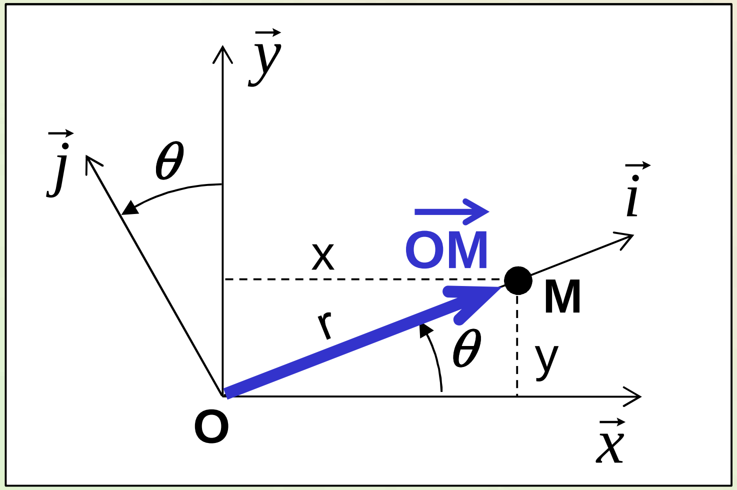
$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{x} + y\,\vec{y}$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(\vec{x}\,\vec{y})}$$

On a deux paramètres (deux distances) **x** et **y** pour définir la position du point **M**.

Paramétrage dans le plan ➡ coordonnées polaires

- ***Le problème se situe dans le plan*** $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$
- $R\left(0,\vec{x},\vec{y}\right)$ ***et*** $R'\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ ***sont deux repères orthonormés directs.***
- ***La position d'un point M est définie par le rayon r et l'angle*** θ



$$M\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j})}$$

$$M\begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{x}\ \vec{y})}$$

On a toujours deux paramètres :
une distance (rayon **r**) et un angle.

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{i} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j})}$$

➡

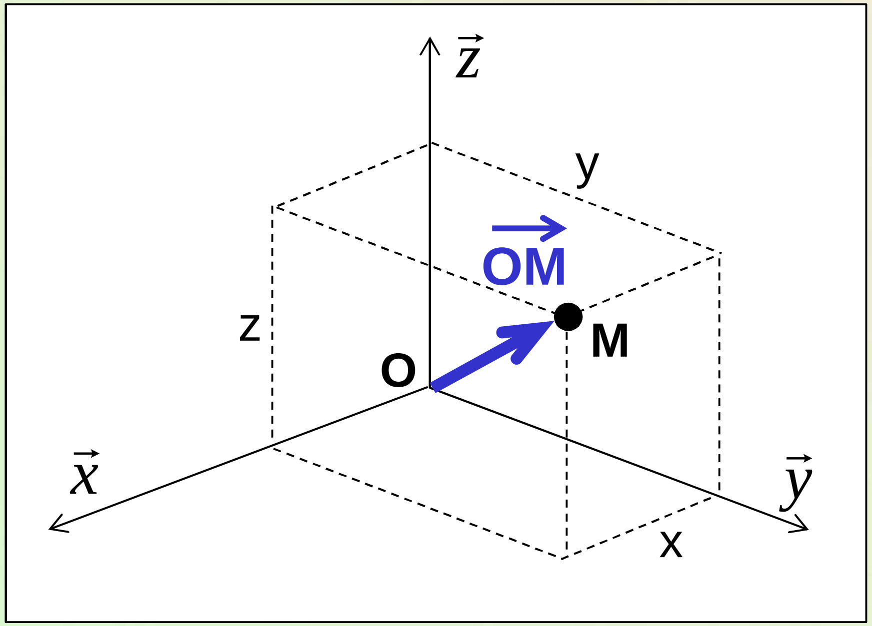
Vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{x} + r\sin\theta\,\vec{y}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}_{(\vec{x}\ \vec{y})}$$

Coordonnées cartésiennes (dans l'espace) :

- $R\left(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ ***est un repère orthonormé direct.***
- ***La position d'un point M est définie par ses trois projections orthogonales sur chacun des axes.***



$$M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B$$

Vecteur position

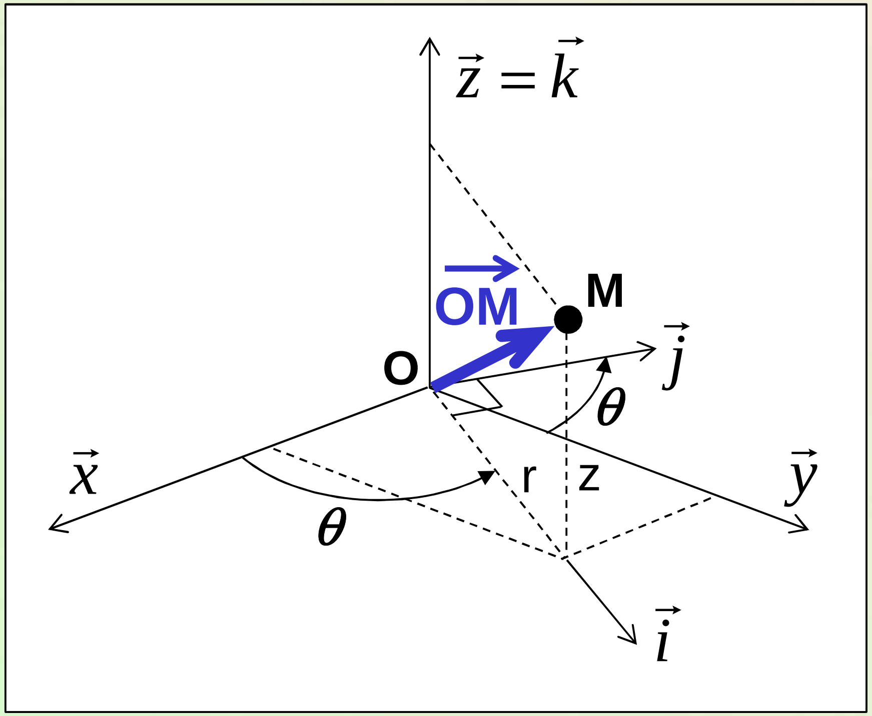
$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = x\,\vec{x} + y\,\vec{y} + z\,\vec{z}$$

On a trois paramètres (trois distances) **x**, **y** et **z** pour définir la position du point **M**.

Coordonnées cylindriques :

- $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ **est un repère orthonormé direct.**
- ***La position d'un point M est définie par le rayon r l'angle*** θ ***et la hauteur z***

$$M \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})}$$



On a toujours trois paramètres : deux distances (rayon **r** et hauteur **z**) et un angle.

Vecteur position

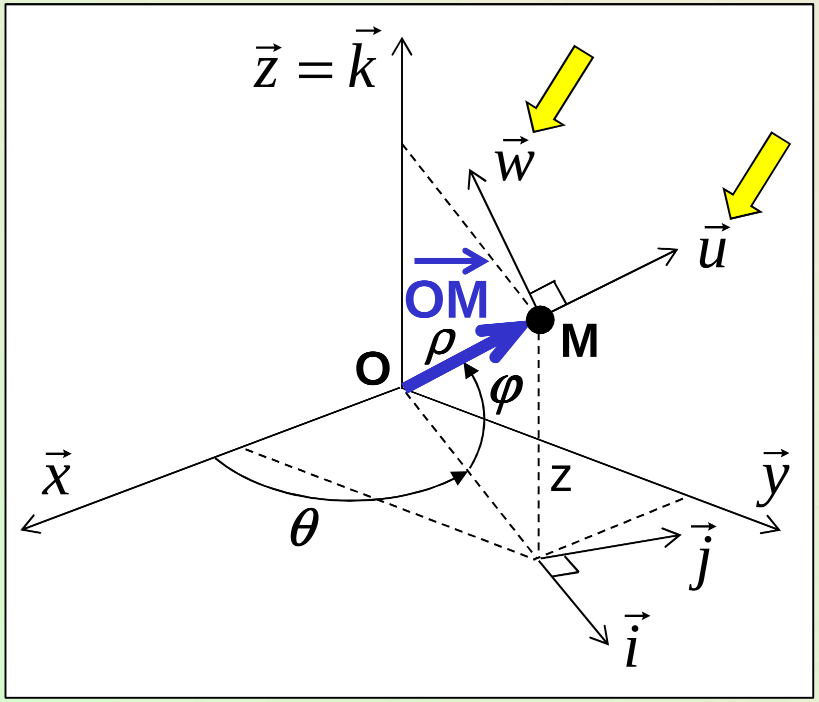
$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{i} + z\,\vec{k} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\cos\theta\,\vec{x} + r\sin\theta\,\vec{y} + z\,\vec{z}$$

$$= \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{bmatrix}_{(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})}$$

Coordonnées sphériques (dans l'espace):

- $R\left(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ ***est un repère orthonormé direct.***
- ***La position d'un point M est définie par le rayon*** ρ ***l'angle*** θ ***et l'angle*** φ



Vecteur position

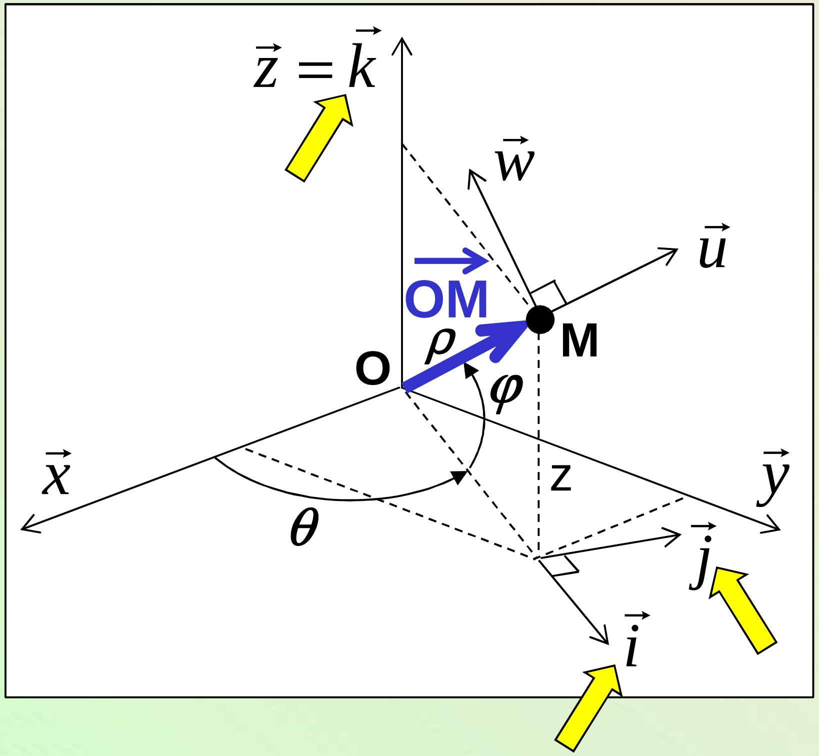
Dans la base $B\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$

$$\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}=\begin{bmatrix}\rho\\0\\0\end{bmatrix}_{(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w})}$$

On a toujours trois paramètres
mais cette fois-ci :
une distance (rayon ρ) et deux angles.

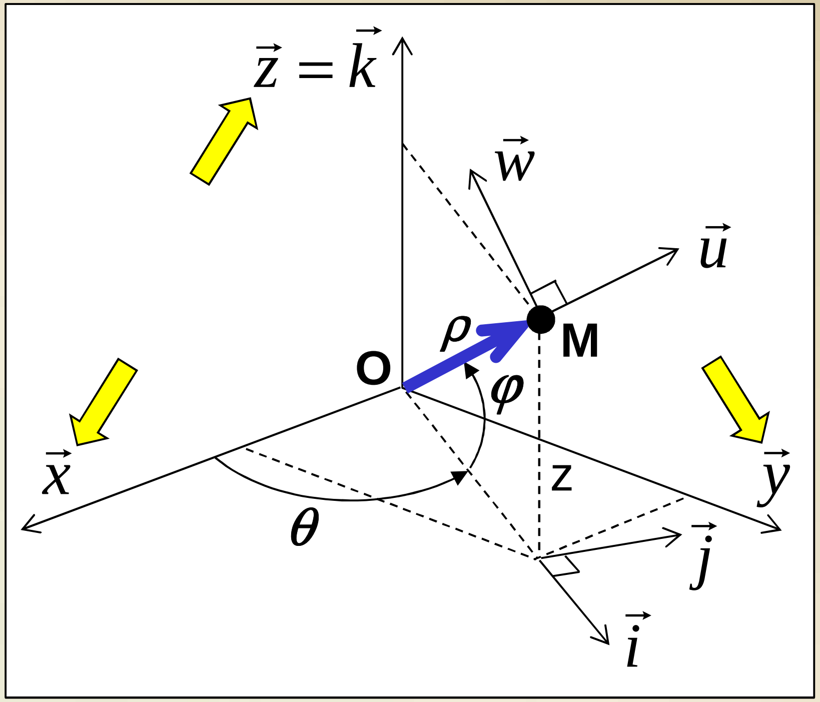
Coordonnées sphériques (dans l'espace):

- $R\left(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ ***est un repère orthonormé direct.***
- ***La position d'un point M est définie par le rayon ρ l'angle θ et l'angle φ***



Dans la base $B\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{k} = \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi \\ 0 \\ \rho\sin\varphi \end{bmatrix}_{(\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k})}$$



Dans la base $B\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\cos\theta\,\vec{x} + \rho\cos\varphi\sin\theta\,\vec{y} + \rho\sin\varphi\,\vec{z}$$

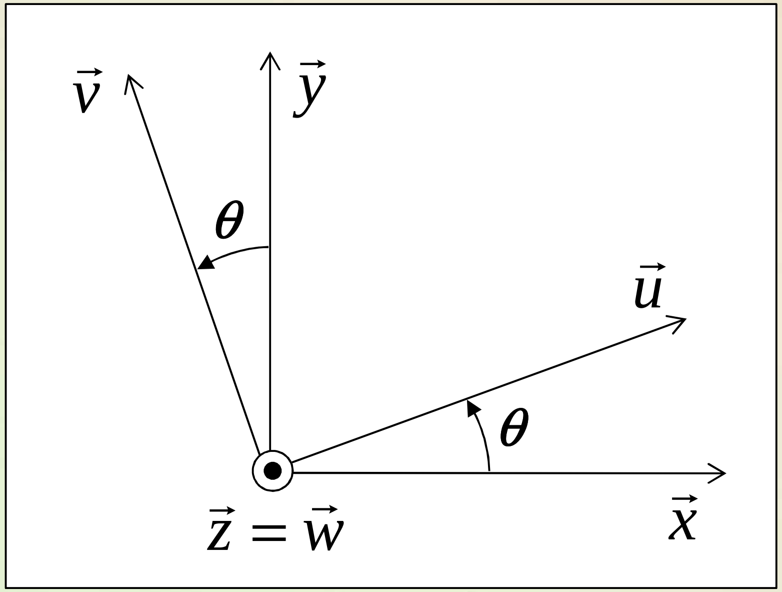
$$= \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi\,\cos\theta \\ \rho\cos\varphi\,\sin\theta \\ \rho\sin\varphi \end{bmatrix}_{(\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z})}$$

7) Angles d'Euler

Sera vu en cours

8) Exemples

▶ *Ecrire les vecteurs de la base* $B'(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ *dans la base* $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$



▶ *Ecrire le vecteur* $\overrightarrow{U}$ *dans la base* $B(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

$$\overrightarrow{U}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}_{(\vec{u}\,\vec{v}\,\vec{w})}$$

Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- Ce qu'est une base, ce qu'est un repère et le fait qu'on utilisera ***indifféremment*** ces deux références (tout comme le numéro de la pièce associée).
- Nos solides sont supposés indéformables.
- Connaître le principe des coordonnées ***cartésiennes*** dans le plan et l'espace.
- Connaître le principe des coordonnées ***polaires*** dans le plan.
- Connaître le principe des coordonnées ***cylindriques*** dans l'espace.
- Connaître le principe des coordonnées ***sphériques*** dans l'espace.
- Savoir écrire les vecteurs d'une base dans une autre (projection vectorielle).
- Savoir écrire un vecteur quelconque dans une base (projection vectorielle).

Utilisation du produit scalaire.