ANALYSE HARMONIQUE

1) Rappels et définitions

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{système}} \longrightarrow s(t)$$

Un système dynamique, continu, linéaire, invariant, monovariable est décrit par une équation différentielle linéaire, à coefficients constants de la forme suivante :

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots\ldots + a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) =$$
$$b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots\ldots + b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

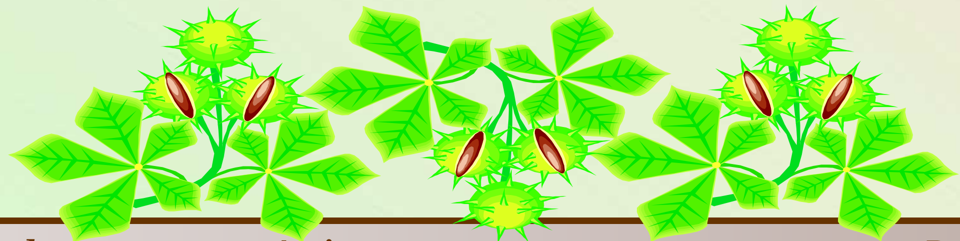
- ***$a_0 \ldots\ldots a_n$ et $b_0 \ldots\ldots b_m$ sont des constantes***
- ***n est l'ordre du système***
- ***pour les systèmes physiques on a toujours : $m \leqslant n$***

$$a_n \times \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots\ldots + a_2 \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \times s(t) =$$
$$b_m \times \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots\ldots + b_2 \times \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{de(t)}{dt} + b_0 \times e(t)$$

La fonction de transfert du système dans le domaine de Laplace, en se plaçant dans les conditions de Heaviside (<u>conditions initiales nulles</u>), est alors :

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m\, p^m + \ldots\ldots + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + \ldots\ldots + a_1\, p + a_0}$$

Utilisation du théorème de dérivation.



Caractérisation d’un signal sinusoïdal

L’analyse harmonique d’un système consiste à lui appliquer une entrée e(t) sinusoïdale, notée :

Le sinus est bien nul à l’origine (t = 0) contrairement au cos.

Bien noter que le signal évolue entre $+E_0$ et $-E_0$.

$$e(t) = E_0 \times \sin(\omega . t)$$

Amplitude

Pulsation

- ***E_0 est l’amplitude du signal (nombre positif) de même unité que e(t).***
- ***ω est la pulsation du signal en rad/s.***

Rappel :

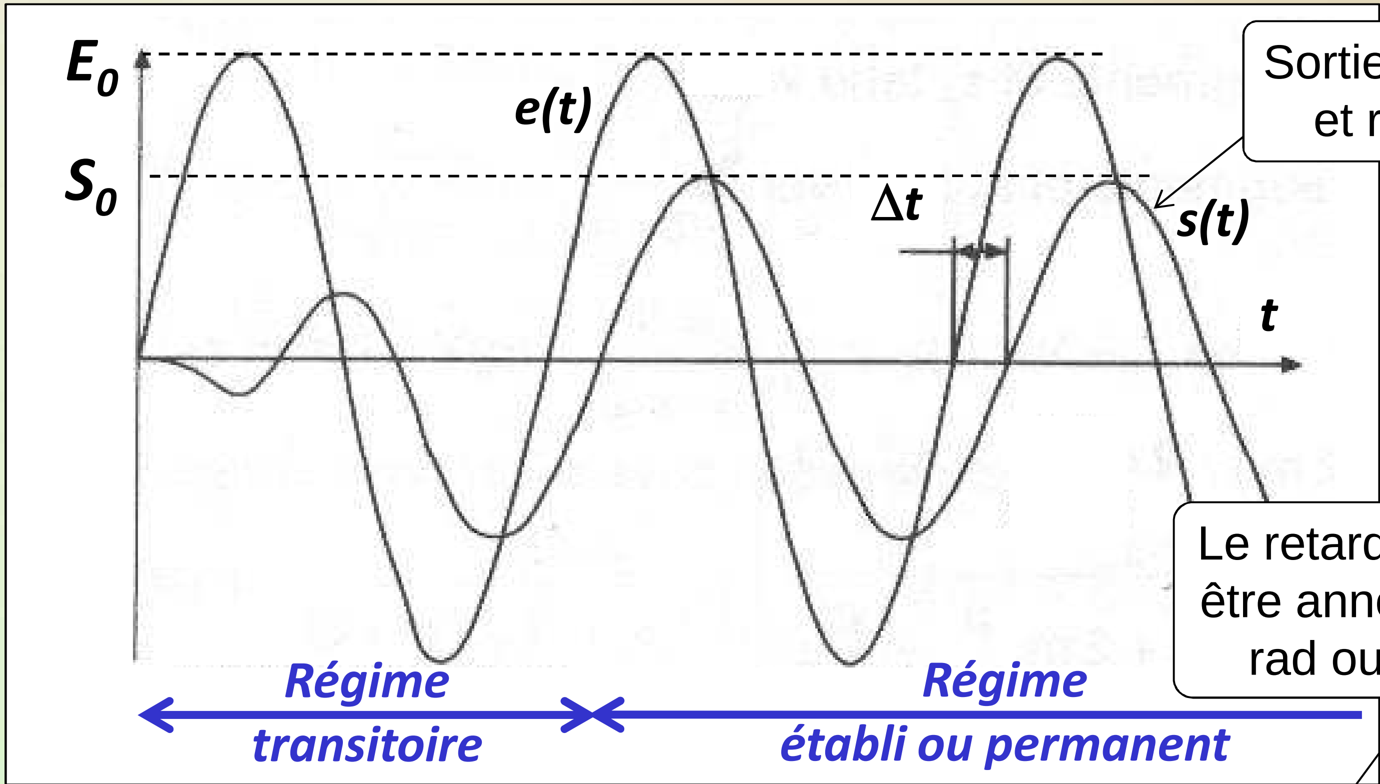
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

pulsation (rad/s)

fréquence (Hz ou s^{-1})

période (s)

Pour un système stable et une fois le régime permanent atteint la sortie s(t) est <u>également sinusoïdale et de même pulsation</u>. Elle est plus ou moins amplifiée et plus ou moins retardée.



Sortie diminuée et retardée

Le retard φ peut être annoncé en rad ou en °.

$$e(t) = E_0 \times \sin(\omega.t)$$

$$s(t) = S_0 \times \sin(\omega.t + \varphi)$$ ***avec*** $$\varphi = \Delta t \times \omega$$

amplitude du signal de sortie de même unité que s(t).

rad/s ***retard exprimé <u>ici</u> en rad.*** ***rad*** ***s*** ***rad/s***

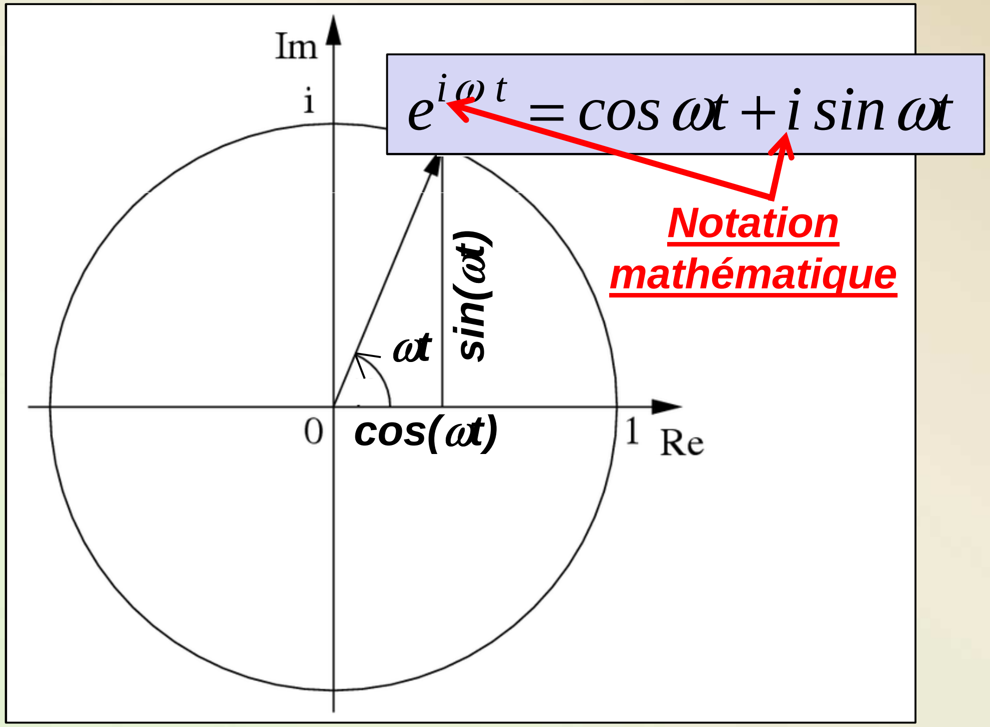
Analyse harmonique du régime permanent

L'analyse harmonique d'un système stable s'intéresse à l'évolution du rapport des amplitudes et du déphasage (retard) entre la sortie et l'entrée (en régime établi) <u>en fonction de la pulsation ω</u>.

Pour « plus de simplicité » (comme en physique) nous allons utiliser les fonctions complexes suivantes :

☞ $$\begin{cases} \underline{e}(t) = E_0 \times e^{j\omega t} \\ \underline{s}(t) = S_0 \times e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

avec $$\begin{cases} e(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{e}(t)\right) \\ s(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{s}(t)\right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \underline{e}(t) = E_0 \times e^{j\omega t} \\ \underline{s}(t) = S_0 \times e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e(t) = \mathrm{Im}(\underline{e}(t)) \\ s(t) = \mathrm{Im}(\underline{s}(t)) \end{cases}$$

L'analyse harmonique s'intéresse aux deux quantités :

▶ ***rapport des amplitudes :***

$$\frac{S_0}{E_0} = \left| \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \right|$$

Rapport des amplitudes
(sortie sur entrée)

▶ ***déphasage (retard) de la sortie avec l'entrée :***

$$\varphi = Arg\left(\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \right)$$

Exemple : un retard d'un quart de période se «traduit» par -90° ou –π/2

Un quart du «tour complet».

Fonction de transfert harmonique

Il est nécessaire de définir, d'après les résultats précédents, l'expression de :

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S_0 \times e^{j(\omega t+\varphi)}}{E_0 \times e^{j\omega t}}$$

Pour cela, injectons $\underline{e}(t)$ ***et*** $\underline{s}(t)$ ***dans l'équation différentielle temporelle initiale :***

$$a_n \times \frac{d^n \underline{s}(t)}{dt^n} + \ldots\ldots + a_2 \times \frac{d^2 \underline{s}(t)}{dt^2} + a_1 \times \frac{d\underline{s}(t)}{dt} + a_0 \times \underline{s}(t) = b_m \times \frac{d^m \underline{e}(t)}{dt^m} + \ldots\ldots + b_2 \times \frac{d^2 \underline{e}(t)}{dt^2} + b_1 \times \frac{d\underline{e}(t)}{dt} + b_0 \times \underline{e}(t)$$

$$\Rightarrow \quad a_n (j\omega)^n \underline{s}(t) + \ldots\ldots + a_2 (j\omega)^2 \underline{s}(t) + a_1 (j\omega) \underline{s}(t) + a_0 \times \underline{s}(t) = b_m (j\omega)^m \underline{e}(t) + \ldots\ldots + b_2 (j\omega)^2 \underline{e}(t) + b_1 (j\omega) \underline{e}(t) + b_0 \times \underline{e}(t)$$

$$\Rightarrow \quad FT(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \ldots\ldots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \ldots\ldots + a_1 (j\omega) + a_0}$$

On appelle <u>fonction de transfert harmonique</u> la valeur prise par la fonction de transfert FT(p) dans le cas particulier où la variable symbolique de Laplace p est un imaginaire pur :

$$\boxed{p = j\omega}$$

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m\, p^m + \ldots\ldots + b_1\, p + b_0}{a_n\, p^n + \ldots\ldots + a_1\, p + a_0}$$

Fonction de transfert initiale

Fonction de transfert harmonique
(en remplaçant ***p*** par ***jω***)

$$\Rightarrow \quad FT(j\omega) = \frac{b_m\,(j\,\omega)^m + \ldots\ldots + b_1\,(j\,\omega) + b_0}{a_n\,(j\,\omega)^n + \ldots\ldots + a_1\,(j\,\omega) + a_0}$$

- ***Le rapport des amplitudes est le module de la fonction de transfert harmonique :***

$$\frac{S_0}{E_0} = \left|FT(j\,\omega)\right|$$

Module

- ***Le déphasage (retard) de la sortie par rapport à l'entrée est l'argument de la fonction de transfert harmonique :***

$$\varphi = Arg\left(FT(j\,\omega)\right)$$

Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- Savoir ce que sont : amplitude, retard, pulsation, fréquence, période.
- La réponse de nos systèmes à une entrée sinusoïdale est aussi sinusoïdale, de même pulsation, même fréquence et même période.
- Ecrire l'équation mathématique d'un signal sinusoïdal d'une certaine amplitude et plus ou moins retardé.
- Ce qu'est la fonction de transfert harmonique (en remplaçant ***p*** par $\boldsymbol{j\omega}$).
- Le module de la fonction de transfert harmonique correspond au rapport des amplitudes (sortie sur entrée).
- L'argument de la fonction de transfert harmonique correspond au retard du signal de sortie par rapport à celui d'entrée.
- «Traduire» un retard en secondes (une certaine proportion de la période) en degrés ou en radians (même proportion pour le «tour complet»).