SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

ETUDE TEMPORELLE

Réponse à un échelon dans le cas où
$z = 1$

RAPPEL DE L'EPISODE PRECEDENT

Le système étudié est un deuxième ordre dont sa fonction de transfert est mise sous la forme canonique suivante :

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} \times p^2}$$

Nous avons mis en place l'expression du signal de sortie dans Laplace (en réponse à un échelon d'amplitude A) :

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}$$

Nous avons calculé le discriminant du dénominateur et avons étudié la cas où celui-ci est positif : <u>z > 1</u> (d'où une factorisation possible).

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2 - 1 \right)$$

Nous avons ainsi démontré que pour <u>z > 1</u> la sortie a un comportement en exponentielle <u>sans oscillation</u>.

Le système est dit « <u>amorti</u> » ou « <u>non oscillant</u> » ou « <u>apériodique</u> »

4-2) Deuxième cas :

z =1

$$S(p)=\frac{K\,A}{p\times\left(\frac{1}{\omega_0^{\;2}}\times p^2+\frac{2\,z}{\omega_0}\times p+1\right)}$$

De la forme :
$(a\,p)^2+2(a\,p)+1$
$\Rightarrow (a\,p+1)^2$

Le système est alors dit apériodique-critique ou critique

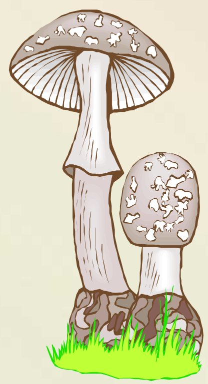
z =1

$$\Rightarrow\quad S(p)=\frac{K\,A}{p\times\left(\boxed{\frac{1}{\omega_0^{\;2}}\times p^2+\frac{2\times 1}{\omega_0}\times p+1}\right)}=\frac{K\,A}{p\times\left(1+\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

On a un pôle double : $p_{12}=-\omega_0$ ***posons :*** $\tau_{12}=-\frac{1}{p_{12}}=\frac{1}{\omega_0}$

Valeur de ***p*** annulant le dénominateur.

$$\Rightarrow\quad S(p)=\frac{K\,A}{p\times(1+\tau_{12}\,p)^2}$$



Pour passer d'un produit à une somme de fonctions.

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times (1+\tau_{12}\,p)^2}$$

Polynôme en ***p*** de degré inférieur de ***1*** à celui du dénominateur (ici le dénominateur est de degré ***2***).

Décomposons en éléments simples : $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\boxed{\beta\,p+\gamma}}{(1+\tau_{12}\,p)^2}$

Réduction au même dénominateur.

$$\Rightarrow\quad S(p) = \frac{\alpha(1+\tau_{12}\,p)^2 + p(\beta\,p+\gamma)}{p(1+\tau_{12}\,p)^2} = \frac{\alpha\left(1+2\tau_{12}\,p+\tau_{12}{}^2 p^2\right)+\beta\,p^2+\gamma\,p}{p(1+\tau_{12}\,p)^2}$$

$$\Rightarrow\quad S(p) = \frac{\alpha + p(2\alpha\tau_{12}+\gamma) + p^2\left(\alpha\tau_{12}{}^2+\beta\right)}{p(1+\tau_{12}\,p)^2}$$

Regroupement des termes en p^0, p^1 et p^2.

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha = K\,A \\ 2\alpha\tau_{12}+\gamma = 0 \\ \alpha\tau_{12}{}^2+\beta = 0 \end{cases}$$

Identification des termes en p^0, p^1 et p^2…

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} \alpha = K\,A \\ \gamma = -2\,K\,A\tau_{12} \\ \beta = -K\,A\tau_{12}{}^2 \end{cases}$$

$$S(p)=\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta\,p+\gamma}{(1+\tau_{12}\,p)^2}$$

$$\begin{cases}\alpha = K\,A\\ \beta = -K\,A\tau_{12}{}^2\\ \gamma = -2\,K\,A\tau_{12}\end{cases}$$

On en déduit : $$S(\,p\,)=\frac{KA}{p}+\frac{-K\,A\tau_{12}{}^2\,p-2\,K\,A\tau_{12}}{(1+\tau_{12}\,p)^2}$$

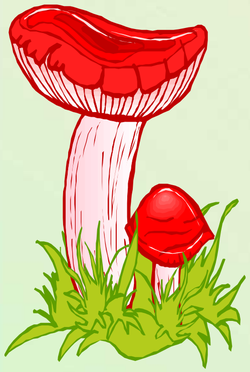
Pour retrouver des transformées inverses connues.

$$\Rightarrow\quad S(p)=KA\times\left(\frac{1}{p}-\frac{\tau_{12}{}^2\,p+2\,\tau_{12}}{(1+\tau_{12}\,p)^2}\right)=KA\times\left(\frac{1}{p}-\tau_{12}\times\frac{\tau_{12}\,p+\boxed{1+1}}{(1+\tau_{12}\,p)^2}\right)$$

$$=\;KA\times\left(\frac{1}{p}-\tau_{12}\times\frac{\cancel{\tau_{12}\,p+1}}{(1+\tau_{12}\,p)^{\cancel{2}}}-\tau_{12}\times\frac{1}{(1+\tau_{12}\,p)^2}\right)$$

$$S(p) = KA \times \left(\frac{1}{p} - \tau_{12} \times \frac{1}{(1+\tau_{12}\, p)} - \tau_{12} \times \frac{1}{(1+\tau_{12}\, p)^2} \right)$$

$$S(p) = KA \times \left[\boxed{\frac{1}{p}} - \cancel{\tau_{12}} \times \frac{1}{\cancel{\tau_{12}}} \times \boxed{\frac{1}{p + \frac{1}{\tau_{12}}}} - \cancel{\tau_{12}} \times \frac{1}{(\tau_{12})^{\cancel{2}}} \times \boxed{\frac{1}{\left(p + \frac{1}{\tau_{12}}\right)^2}} \right]$$



Échelon unitaire

$$\text{"}\frac{1}{p+a}\text{"}$$

$$\text{"}\frac{1}{(p+a)^2}\text{"}$$

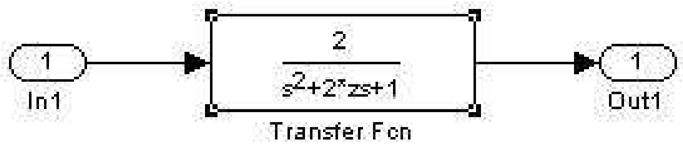
D'où dans le domaine temporel :

$$s(t) = K\,A \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{12}}} - \frac{1}{\tau_{12}} \times t\, e^{-\frac{t}{\tau_{12}}} \right) \times u(t)$$

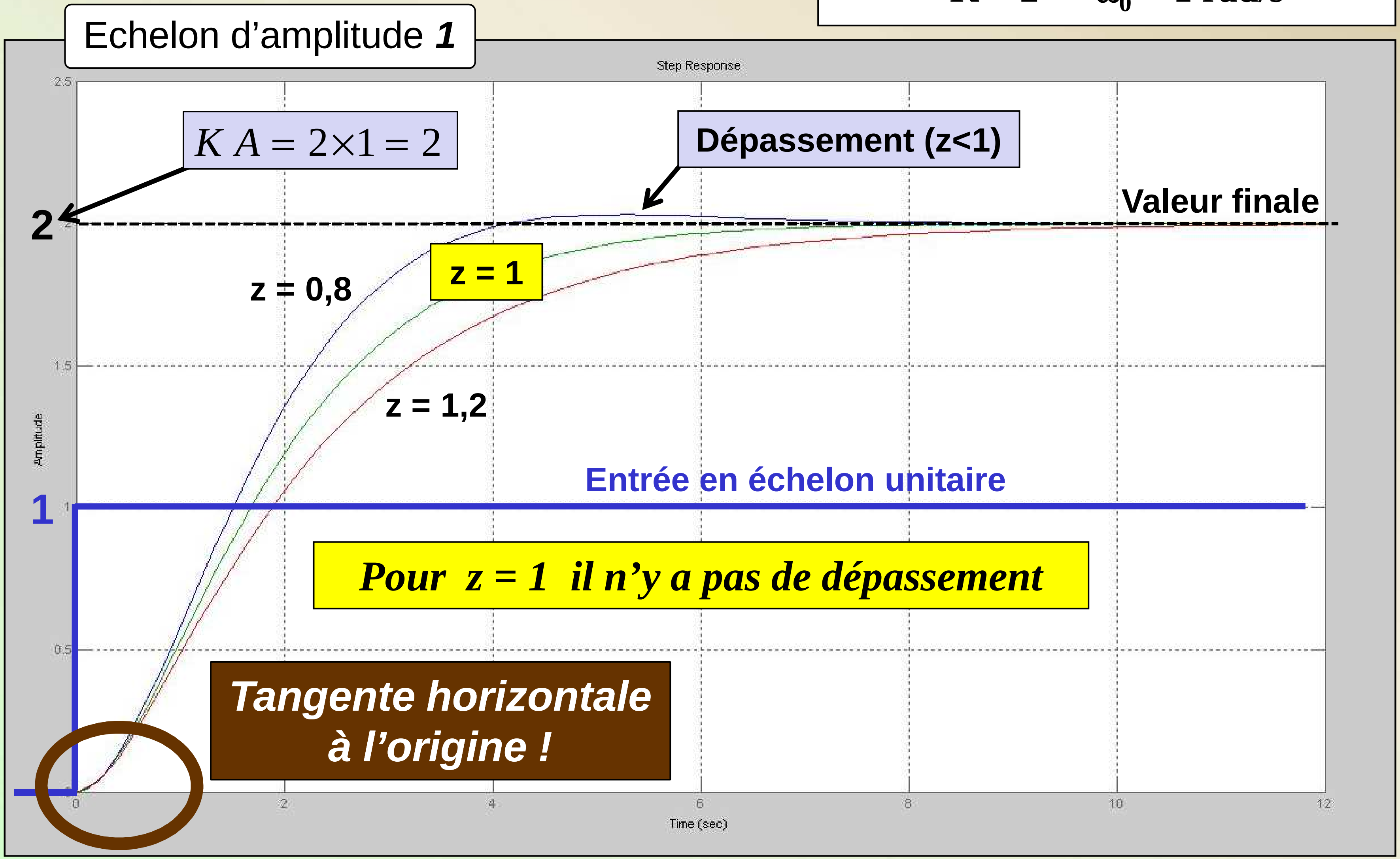
Fonction d'Heaviside

Représentation graphique de la réponse indicielle

$z = 1$



K = 2 $\omega_0 = 1$ rad/s



Ce qu'il faut avoir retenu

(minimum « vital »…)

- Savoir refaire le calcul de la réponse à un échelon pour un deuxième ordre dont le facteur d'amortissement vaut ***1***.
- Savoir que dans ce cas là il n'y a toujours pas d'oscillation.
- Savoir ce qu'est la réponse indicielle (réponse à un échelon d'amplitude ***1***).

Le cas où ***z < 1*** sera vu en cours.