SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE

ETUDE TEMPORELLE

1) Equation différentielle

Un système est dit du deuxième ordre quand il est régi par l'équation différentielle suivante :

Equation différentielle du deuxième degré.

e(t) Consigne d'entrée

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}} \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\,z}{\omega_0} \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

s (t) Variable de sortie

Pulsation propre du système non amorti

Facteur d'amortissement

Gain statique

Ce qui amortit le système (par exemple les frottements sur un système mécanique).

Pulsation à laquelle oscillerait le système si z était nul (par exemple pas de frottement sur un système mécanique).

2) Fonction de transfert

$$\frac{1}{\omega_0^2}\times\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_0}\times\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\times e(t)$$

Passons dans le domaine de Laplace en utilisant le théorème de la dérivation :

Nota : ***la fonction de transfert traduit l'évolution du système depuis une position d'équilibre donc les conditions initiales sont nulles.***

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_0^2}\times p^2\ S(p)+\frac{2z}{\omega_0}\times p\ S(p)+S(p)=K\times E(p)$$

$$\Rightarrow S(p)\times\left(\frac{1}{\omega_0^2}\times p^2+\frac{2z}{\omega_0}\times p+1\right)=K\times E(p)$$

$$\Rightarrow FT(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}\times p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Gain statique

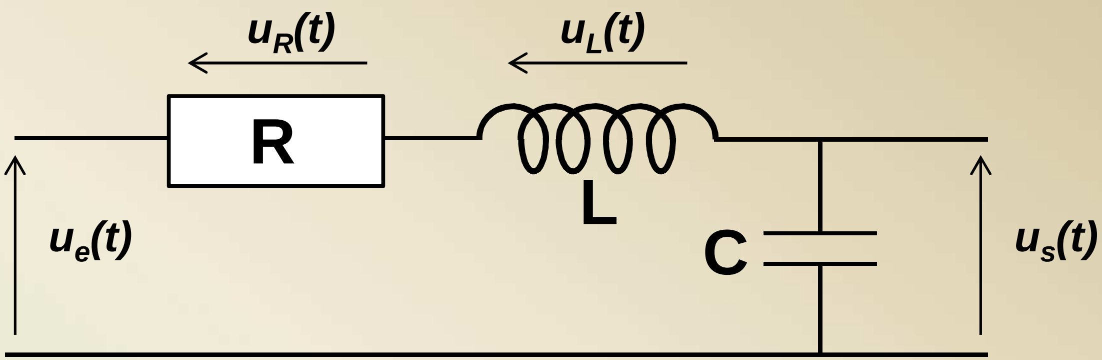
Pulsation propre du système non amorti

Facteur d'amortissement

La ***FT*** est écrite sous forme canonique.

3) Exemple

Circuit RLC



- *R : résistance électrique (en Ohm)*
- *L : inductance de la bobine (en Henry)*
- *C : capacité du condensateur (en Farad)*
- *q : charge du condensateur (en Coulomb)*

Intensité

Tension

- ***Condensateur*** ➡ $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ ***avec*** $q(t) = C \times u_s(t)$ ➡ $i(t) = C \times \dfrac{du_s(t)}{dt}$
- ***Bobine*** ➡ $u_L(t) = L \times \dfrac{d\,i(t)}{dt}$
- ***Résistance*** ➡ $u_R(t) = R \times i(t)$
- ***Loi des mailles*** ➡ $u_e(t) = u_s(t) + u_L(t) + u_R(t) = u_s(t) + L.\dfrac{d\,i(t)}{dt} + R.i(t)$

Lois électriques qui seront vues en physique.

$$u_e(t) = u_s(t) + L.\frac{d\,i(t)}{dt} + R.i(t)$$

avec

$$i(t) = C \times \frac{du_s(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad u_e(t) = u_s(t) + L.C.\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + R.C.\frac{d\,u_s(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad L.C.\frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + R.C.\frac{d\,u_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t)$$

De la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^{\ 2}} \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\,z}{\omega_0} \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

Equation différentielle du deuxième degré.

avec

$$\frac{1}{\omega_0^{\ 2}} = LC \qquad \frac{2\,z}{\omega_0} = RC \qquad K = 1$$

4) Réponse à un échelon

$$\frac{1}{\omega_0^2} \times \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2z}{\omega_0} \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

Prenons un échelon d'amplitude A $\Rightarrow$ $e(t) = A \times u(t)$ $\Rightarrow E(p) = A \times \frac{1}{p} = \frac{A}{p}$

Valant ***0*** pour ***t<0*** et valant ***1*** pour ***t>0***.

Fonction d'Heaviside

Utilisons le théorème de dérivation pour passer dans le domaine de Laplace.

On cherche l'évolution d'un système depuis une position d'équilibre

$\Rightarrow$ ***les conditions initiales sont nulles.***

On a donc :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2\ S(p) + \frac{2z}{\omega_0} \times p\ S(p) + S(p) = K \times \underbrace{\boxed{\frac{A}{p}}}_{E(p)}$$

$$\Rightarrow S(p) \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right) = \frac{K\,A}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}}$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\boxed{\frac{1}{\omega_0^{\,2}} \times p^2 + \frac{2\,z}{\omega_0} \times p + 1} \right)}$$

De la forme : $a\,p^2 + b\,p + c$

Essayons de factoriser le dénominateur ➡ ***calculons le discriminant.***

$$\Delta = "b^2 - 4\,a\,c" = \left(\frac{2\,z}{\omega_0} \right)^2 - 4 \times \frac{1}{\omega_0^{\,2}} \times 1 = \frac{4\,z^2}{\omega_0^{\,2}} - \frac{4}{\omega_0^{\,2}}$$

➡ $$\boxed{\Delta = \frac{4}{\omega_0^{\,2}} \times \left(z^2 - 1\right)}$$

Nous avons donc trois cas d'étude :

- $\Delta > 0$ ➡ $z > 1$

  Le système sera dit « <u>amorti</u> » ou « <u>non oscillant</u> » ou « <u>apériodique</u> »

- $\Delta = 0$ ➡ $z = 1$

  Le système sera dit « <u>apériodique critique</u> » ou « <u>critique</u> »

- $\Delta < 0$ ➡ $z < 1$

  Le système sera dit « <u>oscillant</u> » ou « <u>sous amorti</u> » ou « <u>pseudopériodique</u> »

4-1) Premier cas :

$$z > 1$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(\frac{1}{\omega_0^2} \times p^2 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + 1 \right)}$$

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2 - 1 \right)$$

On a deux pôles réels :

$$p_1 = \text{"}\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\text{"} = \frac{-\frac{2z}{\omega_0} + \sqrt{\frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2-1\right)}}{2 \times \frac{1}{\omega_0^2}} = \frac{-\frac{\cancel{2}z}{\cancel{\omega_0}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{\omega_0}}\sqrt{z^2-1}}{\frac{\cancel{2}}{\omega_0^{\cancel{2}}}}$$

$$\boxed{p_1 = -\omega_0 \times \left(z - \sqrt{z^2-1} \right)}$$

p_1 est l'une des deux solutions résolvant l'équation du second degré.

$$p_2 = \text{"}\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\text{"} = \frac{-\frac{2z}{\omega_0} - \sqrt{\frac{4}{\omega_0^2} \times \left(z^2-1\right)}}{2 \times \frac{1}{\omega_0^2}} = \frac{-\frac{\cancel{2}z}{\cancel{\omega_0}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{\omega_0}}\sqrt{z^2-1}}{\frac{\cancel{2}}{\omega_0^{\cancel{2}}}}$$

$$\boxed{p_2 = -\omega_0 \times \left(z + \sqrt{z^2-1} \right)}$$

p_2 est l'autre solution résolvant l'équation du second degré.

4-1) Premier cas :

$$z > 1$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p\times\left(\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}\times p^2 + \frac{2\,z}{\omega_0}\times p + 1\right)}$$

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^{\ 2}}\times\left(z^2 - 1\right)$$

$$p_1 = -\omega_0\times\left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$p_2 = -\omega_0\times\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

D'où la factorisation suivante :

$$S(p) = \frac{K\,A}{p\times\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}\left(p - p_1\right)\times\left(p - p_2\right)}$$

$a\,p^2 + b\,p + c$ se factorise sous la forme $a\times\left(p - p_1\right)\times\left(p - p_2\right)$

$$S(p)=\frac{K\,A}{p\times\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\left(p-p_1\right)\times\left(p-p_2\right)}$$

Mettons p_1 et p_2 en facteur :

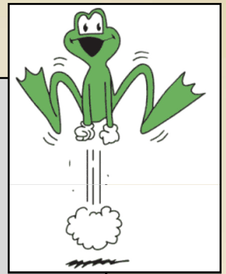
$$\left(1-\frac{p}{p_1}\right)\times\left(1-\frac{p}{p_2}\right)$$

$$\Rightarrow\; S(p)=\frac{K\,A}{p\times\boxed{\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\times p_1\,p_2}\times\boxed{\left(\frac{p}{p_1}-1\right)\times\left(\frac{p}{p_2}-1\right)}}$$

Pour mettre le résultat sous une forme plus « simple » (si, si…).

$$\frac{1}{\omega_0^{\,2}}\times\left(-\omega_0\right)\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)\times\left(-\omega_0\right)\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$$

$$=\frac{\cancel{\omega_0^{\,2}}}{\cancel{\omega_0^{\,2}}}\times\left[z^2+\cancel{z\sqrt{z^2-1}}-\cancel{z\sqrt{z^2-1}}-\left(\sqrt{z^2-1}\right)^2\right]=\cancel{z^2}-\cancel{z^2}+1=\mathbf{1}$$



Bon, c'est quand même plus simple. M'enfin !...

$$\Rightarrow\; S(p)=\frac{K\,A}{p\times\left(1-\frac{p}{p_1}\right)\times\left(1-\frac{p}{p_2}\right)}$$

$$S(p) = \frac{K\,A}{p \times \left(1 - \frac{p}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{p}{p_2}\right)}$$

Changement de variable permettant une écriture encore plus « simple ».

Posons : $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ ***et*** $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$

$$\Rightarrow \quad S(p) = \frac{K\,A}{p \times (1 + \tau_1\, p) \times (1 + \tau_2\, p)}$$

Faisons une décomposition en éléments simples.

Car sous la forme du ***produit*** de 3 fonctions (alors qu'il faudrait une ***somme***)

$$S(p) = \underbrace{K\,A}_{\text{Simple réel}} \times \frac{1}{p} \times \frac{1}{1 + \tau_1\, p} \times \frac{1}{1 + \tau_2\, p}$$

Cette décomposition sera vue en cours.

<u>Ce qu'il faut avoir retenu</u>
(minimum « vital »…)

- La forme canonique de la fonction de transfert d'un deuxième ordre (à savoir par cœur).

$$\frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \times p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- Ce que sont gain statique ***K***, facteur d'amortissement ***z*** et pulsation propre ω_0.
- Savoir que la réponse temporelle d'un deuxième ordre à un échelon dépend de la valeur du facteur d'amortissement ***z*** (par rapport à ***1***) :
  - pas d'oscillations si ***z > 1***
  - présence d'oscillations si ***z < 1***

La suite sera vue en cours.