

*SYSTEME DU
PREMIER ORDRE*

ETUDE TEMPORELLE



1) Equation différentielle

2) Fonction de transfert

3) Etude de trois exemples

4) Réponse à un échelon

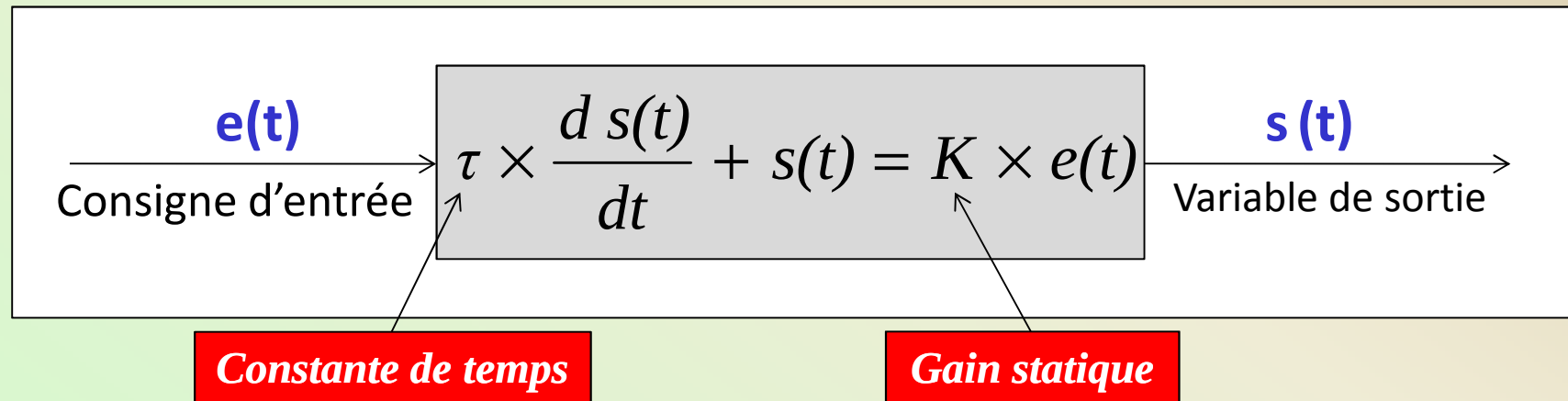
5) Représentation graphique

6) Réponse à l'impulsion



1) Equation différentielle

Un système est dit du premier ordre quand il est régi par l'équation différentielle suivante :



Une simple dérivée première sur le signal de sortie (d'où le nom **premier ordre**).

Le coefficient devant $s(t)$ doit être unitaire (sinon diviser l'ensemble par ce coefficient).



2) Fonction de transfert

$$\tau \times \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

Passons dans le domaine de Laplace en utilisant le théorème de la dérivation :

Nota : la fonction de transfert traduit l'évolution du système depuis une position d'équilibre donc les conditions initiales sont nulles.

$$\rightarrow \tau \times p S(p) + S(p) = K \times E(p)$$

$$\rightarrow S(p) \times (\tau p + 1) = K \times E(p)$$

Gain statique

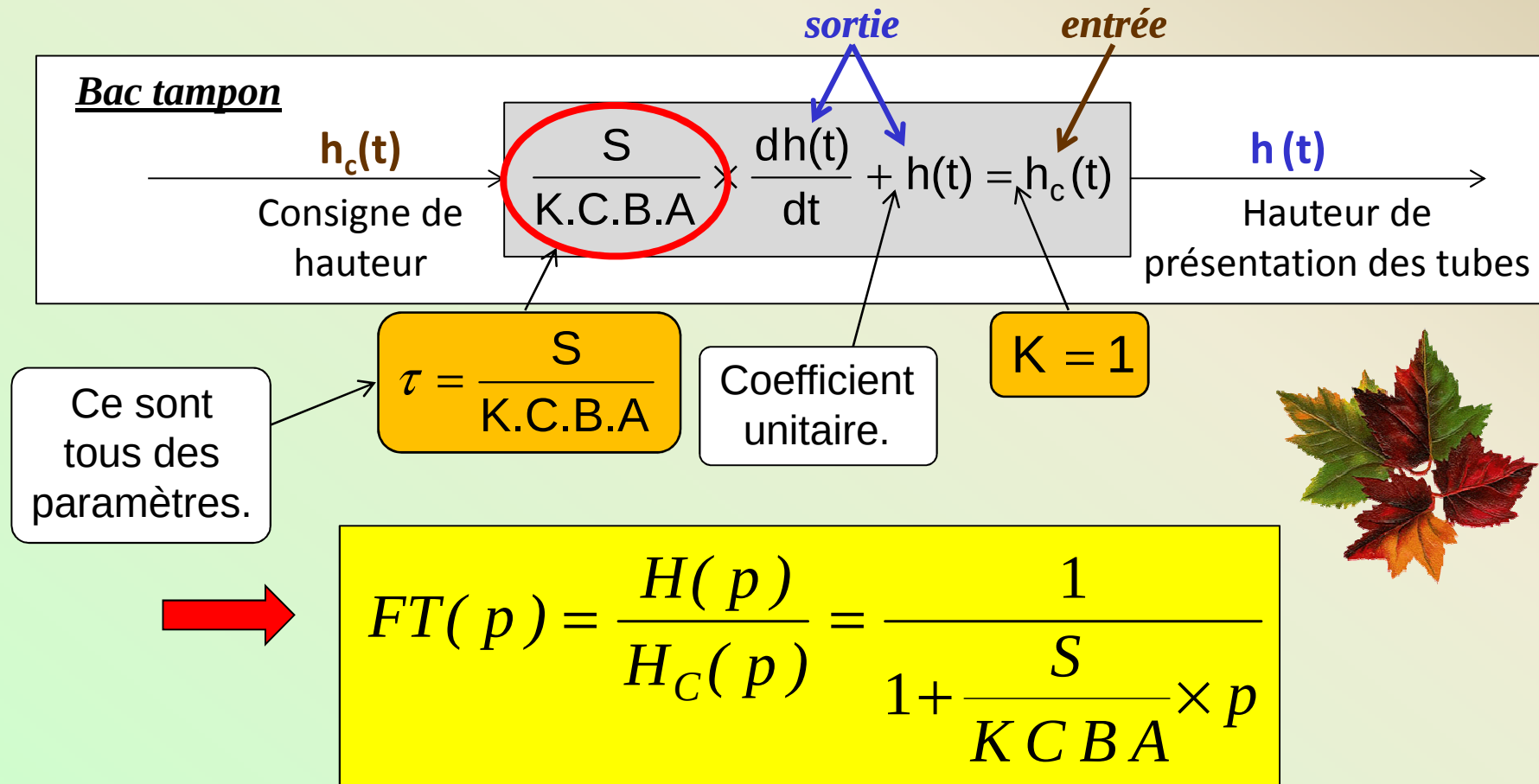
$$\rightarrow FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Connaître par cœur cette expression mise sous forme canonique.

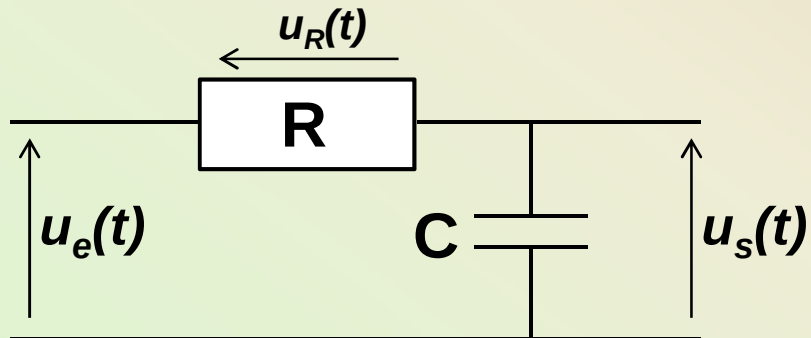
Constante de temps

3) Etude de trois exemples

► Premier exemple : TD de l'asservissement en hauteur d'un bac tampon



► Deuxième exemple : circuit RC



R : résistance électrique (en Ohm)
 C : capacité du condensateur (en Farad)
 q : charge du condensateur (en Coulomb)

Equations électriques (voir cours de physique).

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= C \times u_s(t) \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow i(t) = C \times \frac{du_s(t)}{dt}$$

$$R \times i(t)$$

$$\text{or } u_e(t) = u_s(t) + u_R(t) = u_s(t) + RC \times \frac{du_s(t)}{dt}$$

$$\tau = RC$$

sortie

$$K = 1$$

entrée

$$RC \times \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t)$$

Coefficient unitaire.

$$FT(p) = \frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp}$$

Equation
différentielle

Fonction de
transfert

Exemples

Réponse à
un échelon

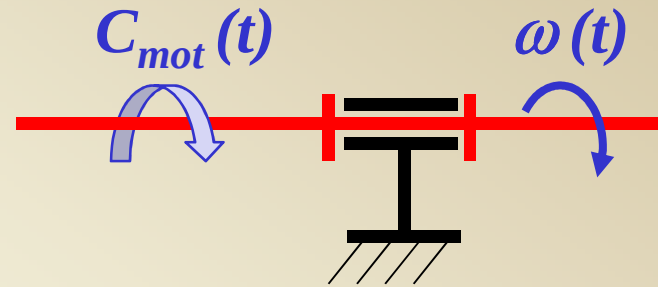
Représentation
graphique

Réponse à
l'impulsion ►

► **Troisième exemple :**

Liaison pivot avec frottement

Cours du deuxième semestre...



Hypothèses :

Couple résistant constant (négligé)

- On néglige les frottements secs au niveau de la liaison pivot.
- On suppose des frottements fluides au niveau de la liaison pivot (coefficient f)
 ➔ couple résistant proportionnel à la vitesse angulaire : $C_{rés}(t) = f \times \omega(t)$
- On suppose le centre de gravité de l'arbre sur l'axe de rotation.
- On notera J l'inertie de l'arbre en rotation.

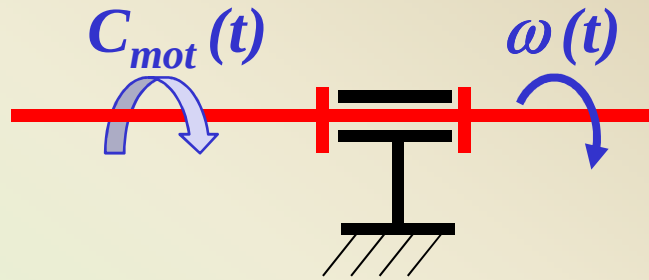
1) Isolement : on isole l'arbre en rotation.

2) Bilan des actions mécaniques extérieures :

Couple moteur Couple du poids Liaison pivot avec frottements fluides



Cours de
deuxième année...



3) Principe fondamental de la dynamique :

$$C_{mot}(t) + 0 - C_{rés}(t) = J \times \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$\uparrow$
 $f \times \omega(t)$

$$\Rightarrow \left(\frac{J}{f} \right) \times \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \frac{1}{f} \times C_{mot}(t)$$

$\tau = \frac{J}{f}$

Coefficient unitaire.

$K = \frac{1}{f}$

Labels in the diagram: "sortie" points to the $\frac{J}{f}$ term, "entrée" points to the $\frac{1}{f}$ term.



$$FT(p) = \frac{\Omega(p)}{C_{mot}(p)} = \frac{\frac{1}{f}}{1 + \frac{J}{f} p}$$

Equation
différentielle

Fonction de
transfert

Exemples

Réponse à
un échelon

Représentation
graphique

Réponse à
l'impulsion ▶

4) Réponse à un échelon

$$\tau \times \frac{d s(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

Prenons un échelon d'amplitude A



$$e(t) = A \times u(t)$$

Fonction d'Heaviside

$$\text{d'où } E(p) = \frac{A}{p}$$

Utilisons le théorème de dérivation pour passer dans le domaine de Laplace

On cherche l'évolution d'un système depuis une position d'équilibre



les conditions initiales sont donc nulles

$$\tau \times \frac{d s(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t) \quad \Rightarrow \quad \tau \times p S(p) + S(p) = K \times \frac{A}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) \times (\tau p + 1) = \frac{K A}{p} \quad \Rightarrow$$

$$S(p) = \frac{K A}{p \times (\tau p + 1)}$$

$$S(p) = \frac{K A}{p \times (\tau p + 1)}$$

On a vu dans le cours sur les transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{p(1+\tau p)} \rightsquigarrow \frac{1}{1-e^{-\frac{t}{\tau}}} \rightarrow s(t) = K A \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Nota : on peut retrouver ce résultat différemment en faisant une décomposition en éléments simples de la forme :

Pour passer d'un produit à une somme de fonctions.

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{\tau p + 1}$$

Degré du numérateur inférieur de 1 à celui du dénominateur

Réduisons au même dénominateur

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{\tau p + 1} = \frac{\alpha \times (\tau p + 1) + \beta \times p}{p \times (\tau p + 1)}$$

$$= \frac{\alpha + p \times (\alpha \tau + \beta)}{p \times (\tau p + 1)} = \frac{K A}{p \times (\tau p + 1)}$$

$$S(p) = \frac{K A}{p \times (\tau p + 1)}$$

Regroupons les termes en p^0 et ceux en p^1 Termes en p^0 : $\alpha \times p^0 = K A \times p^0$ Termes en p^1 : $(\alpha \tau + 1) \times p^1 = 0 \times p^1$

Identifions les constantes α et β des numérateurs:

$$\begin{cases} \alpha = K A \\ \alpha \cdot \tau + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\alpha \cdot \tau = -K A \tau$$

$$D'où: S(p) = \frac{K A}{p} - \frac{K A \tau}{\tau p + 1}$$

$$\Rightarrow K A \times \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \rightsquigarrow s(t) = K A \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Equation
différentielleFonction de
transfert

Exemples

Réponse à
un échelonReprésentation
graphiqueRéponse à
l'impulsion ►

Ce qu'il faut avoir retenu (minimum « vital »...)

- ▶ La forme canonique de la fonction de transfert d'un premier ordre :
(à savoir par cœur) $\frac{K}{1 + \tau p}$
- ▶ Ce que sont gain statique K et constante de temps τ .
- ▶ Savoir retrouver par calcul la réponse temporelle d'un premier ordre à un échelon.
- ▶ Savoir mettre en place une décomposition en éléments simples (méthode).

La suite sera vue en cours.

