# MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

# 1) Rappel

➡ *Une action mécanique peut être à distance ou de contact.*

➡ *Une action mécanique peut être modélisée par :*

- *un glisseur*
- *un couple pur*
- *une action mécanique générale*

# 2) Modélisation locale des actions mécaniques

*Ce modèle permet de représenter localement toutes les actions mécaniques par un champ vectoriel.*

*Ce modèle est utilisé lorsqu'on étudie notamment les pressions de contact entre deux solides ou les déformations de solides (hors programme).*

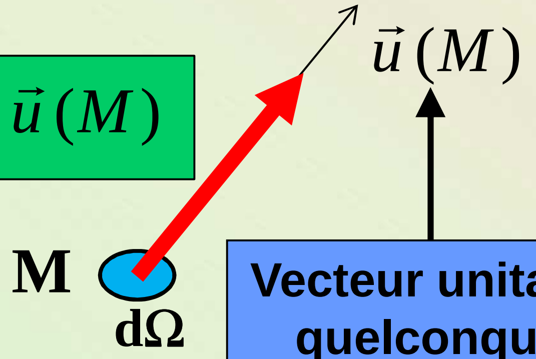
## Première étape

***On définit, à partir du modèle général ci-dessous, les actions mécaniques élémentaires sur chaque élément du domaine.***

***<u>Exemple :</u> supposons que l'action mécanique est proportionnelle à la mesure de l'élément de domaine d$\Omega$.***

- Volume élémentaire *dV* pour une action à distance (→poids)
- Surface élémentaire *dS* pour une action de contact (→liaison)

$$f(M)\times d\Omega\,\vec{u}(M)$$




Vecteur unitaire quelconque

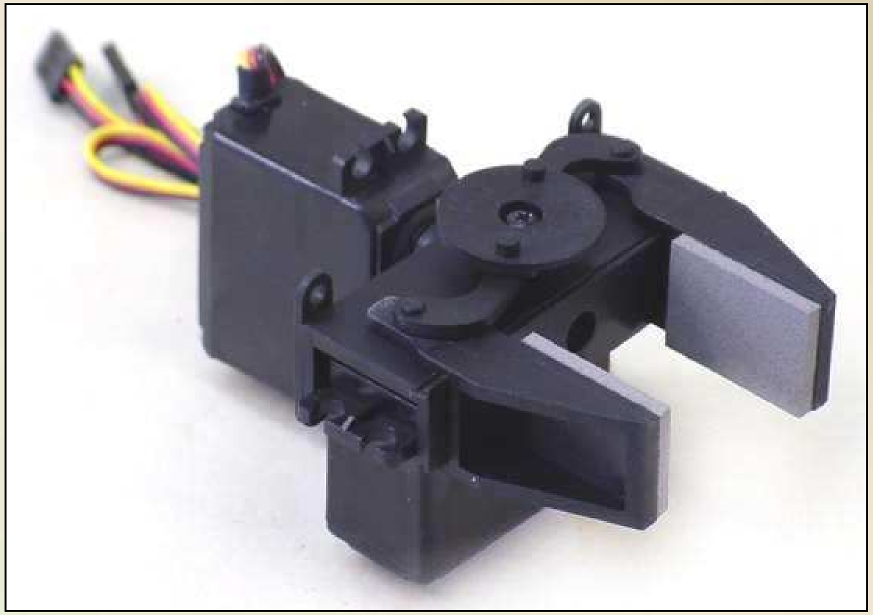
- Densité volumique (N/m$^3$) pour une action mécanique à distance.
- Densité surfacique (N/m$^2$) pour une action mécanique de contact surfacique.
- Densité linéïque (N/m) pour une action mécanique de contact linéïque.

## Deuxième étape

***On considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur le domaine étudié.***

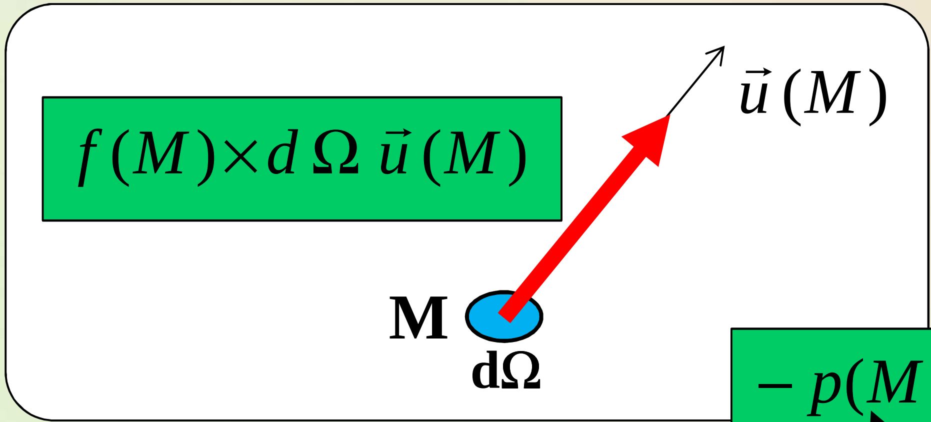
***La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel correspondant à la modélisation locale des actions mécaniques.***

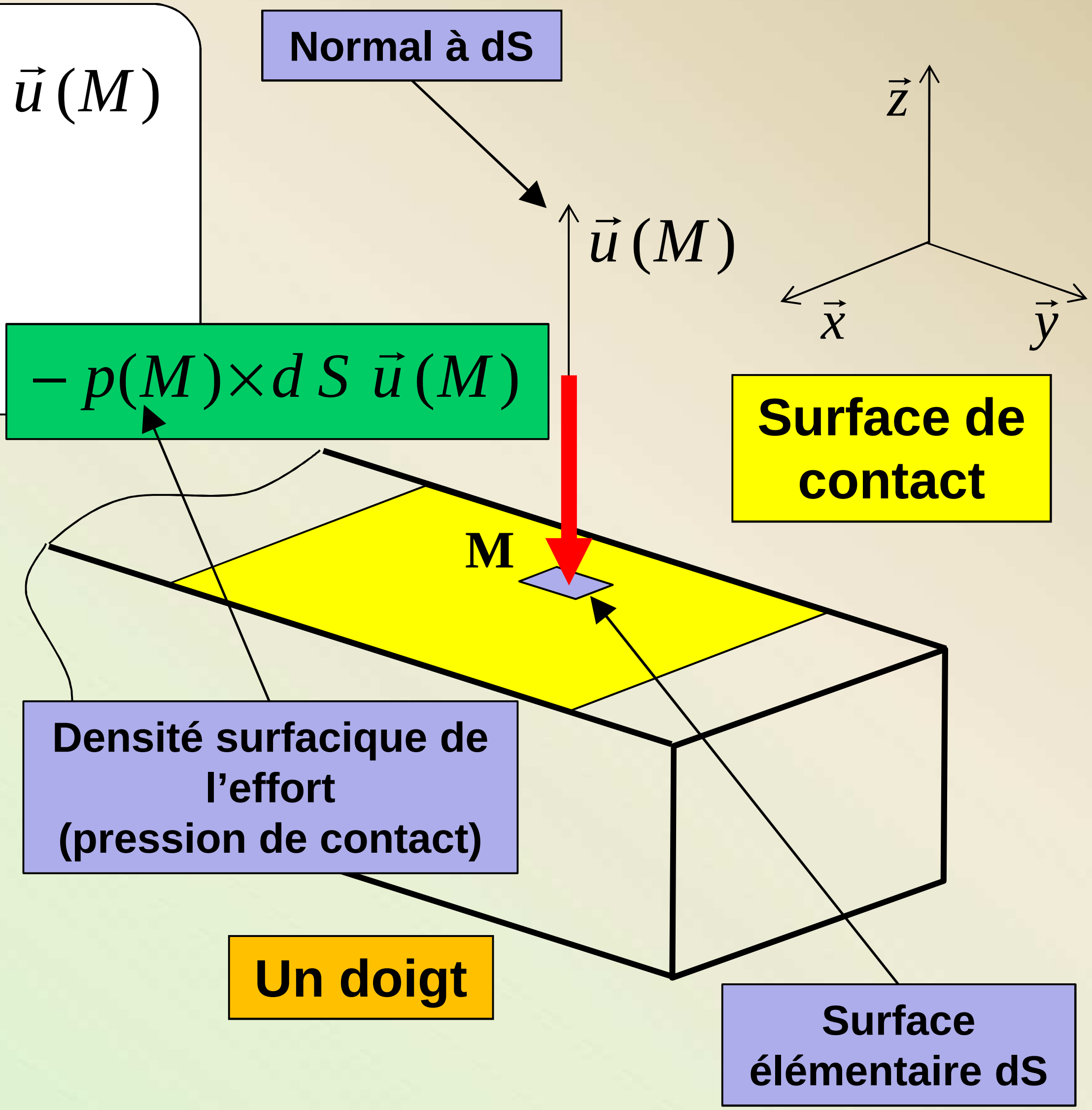
***Exemple :*** *soit l'un des deux doigts d'une pince de bras manipulateur.*



***Modélisons localement l'action mécanique de l'objet en appui sur le doigt en supposant un champ de pression uniforme.***

# *Modélisation locale de l’action mécanique de l’objet sur un doigt*



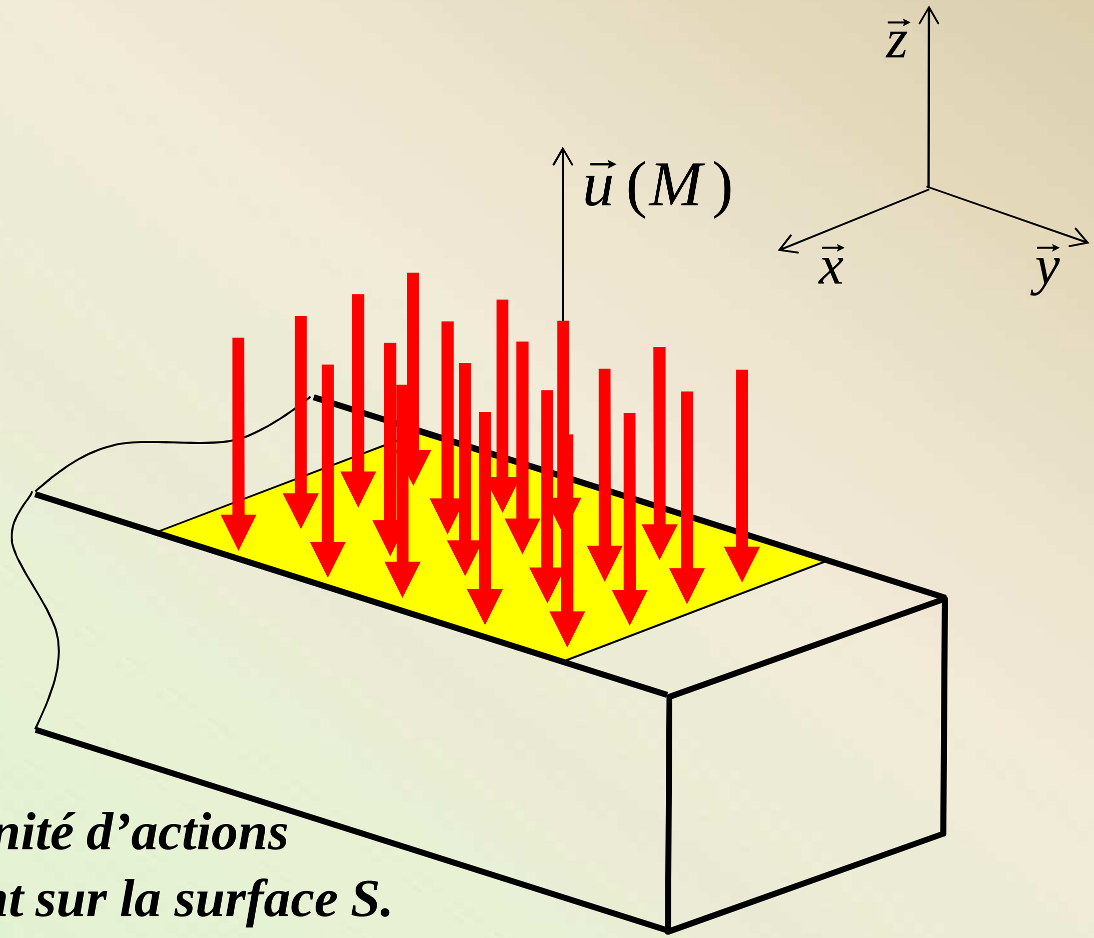




## ***1ère étape :***

***Modélisation de l’action mécanique élémentaire***

## ***2ème étape :***

# Modélisation locale de l'action mécanique de l'objet sur un doigt




## 1ère étape :

*Modélisation de l'action mécanique élémentaire*

## 2ème étape :

*On considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires agissant sur la surface S.*

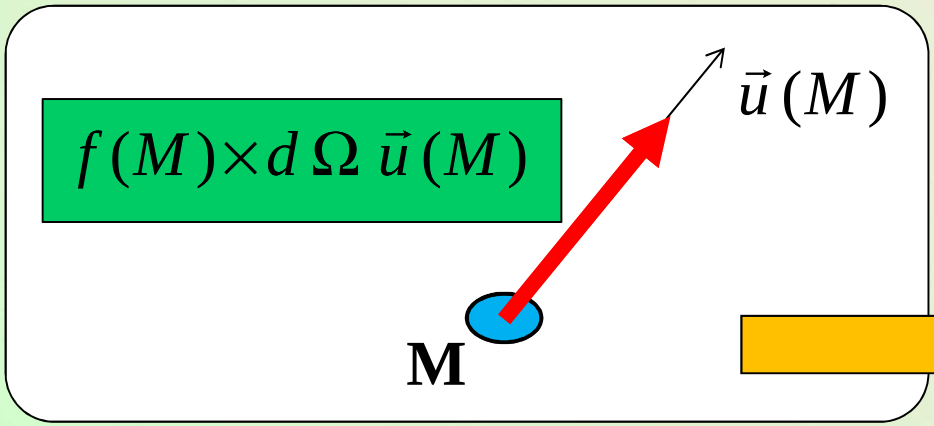
→ *on obtient ainsi un champ de pression uniforme comme modèle d'action mécanique.*

# 3) Modélisation globale des actions mécaniques

*Lorsque l'on étudie un ensemble de solides indéformables, il est suffisant d'utiliser un modèle global pour les actions mécaniques.*

*Ce modèle global, plus simple à utiliser, va permettre de représenter globalement l'ensemble (infini) de toutes les actions mécaniques élémentaires par un simple vecteur.*

*Une force (résultante) est alors obtenue à partir de l'intégration de l'ensemble (infini) de toutes ces actions mécaniques élémentaires sur le domaine du modèle local.*




$$f(M) \times d\Omega \, \vec{u}(M)$$

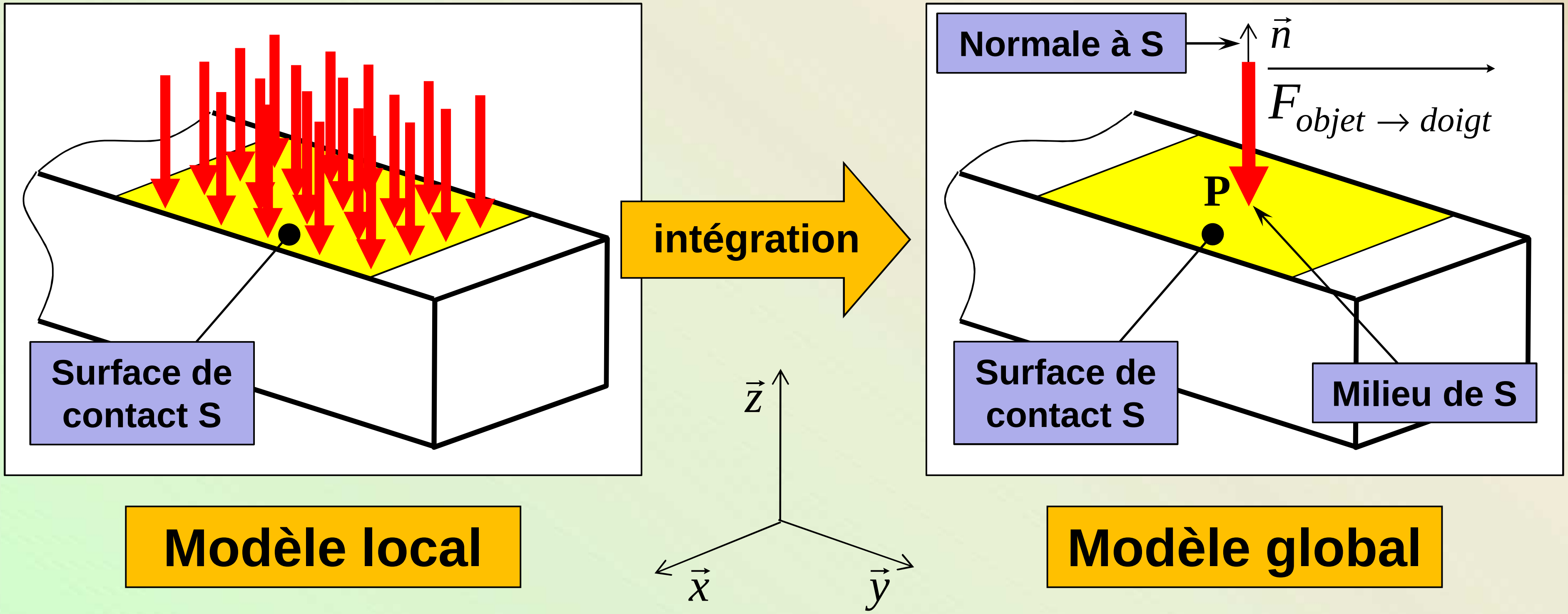
- Volume dV → intégrale triple
- Surface *dS* → intégrale double
- Ligne *dL* → intégrale simple

$$\overrightarrow{F(M)} = \int_{\Omega} f(M) \times d\Omega \; \vec{u}(M)$$

**Exemple :** ***reprenons le cas de l'un des deux doigts d'une pince de bras manipulateur.***

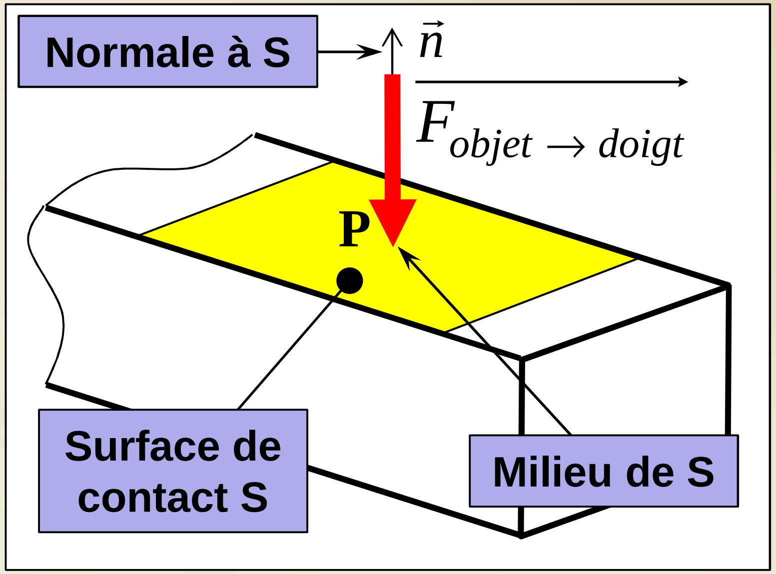
$$\overrightarrow{F_{objet \rightarrow doigt}} = \int_{\Omega} p(M) \times d\,S \ \ (-\vec{n})$$

Densité surfacique de l'effort (pression de contact)




Modèle local

Modèle global




*La notion de force sous forme d'un simple vecteur lié (P, $\vec{F}$) est cependant insuffisante pour modéliser complètement cette action mécanique.*

*Notamment par rapport au fait que cette force a tendance à modifier le mouvement de rotation du système sur lequel elle agit.*

➡ *notion de moment d'une force.*

***Le moment d'une force en A (point quelconque) est obtenu par intégration de l'ensemble (infini) des actions mécaniques élémentaires sur le domaine du modèle local.***

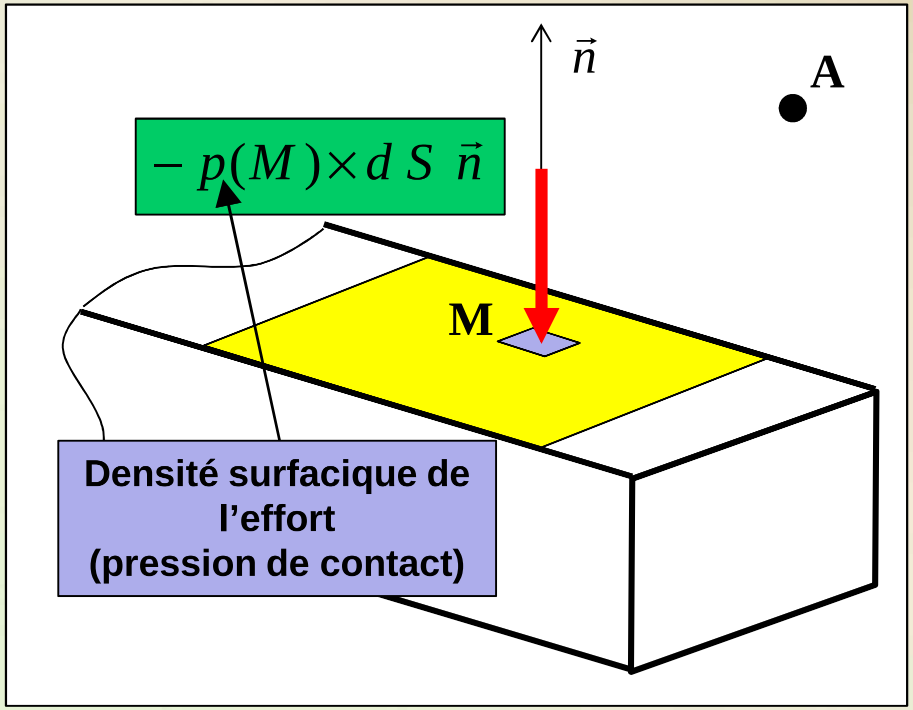
$$\overrightarrow{M^{A}(\vec{F})} = \int_{\Omega} \overrightarrow{AM} \wedge f(M) \times d\Omega \; \vec{u}(M)$$

**Volume dV**
**Surface *dS***
**Ligne *dL***

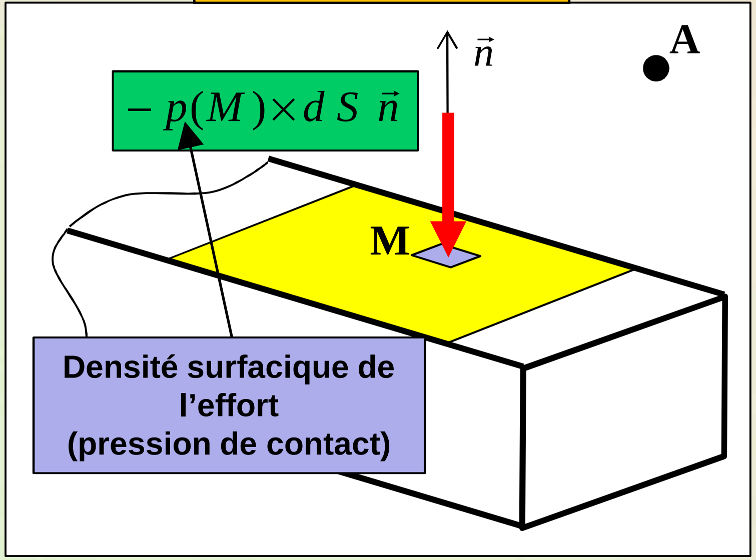
***<u>Cas du doigt du bras manipulateur :</u>***

$$\overrightarrow{M^{A}(\vec{F})} = \iint_{S} \overrightarrow{AM} \wedge p(M) \times dS\,(-\vec{n})$$

**Intégrale double (surface)**

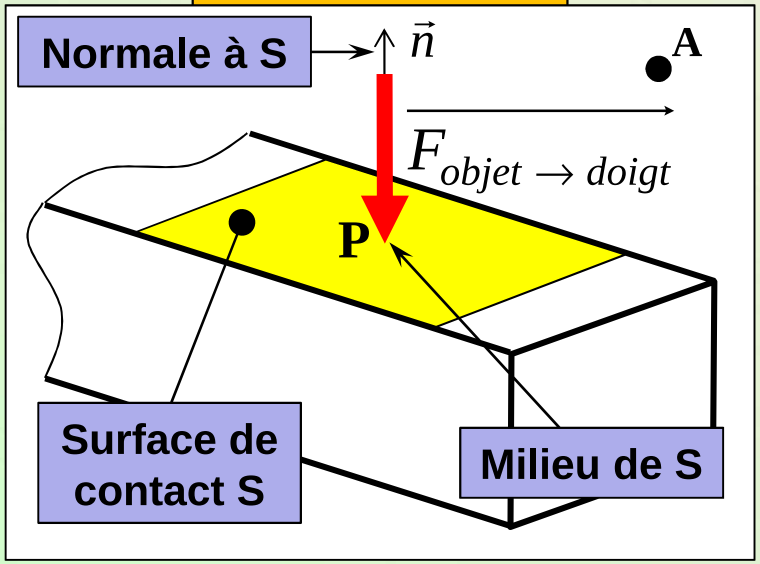


## Modèle local




$$\overrightarrow{M^A(\vec{F})} = \iint_S \overrightarrow{AM} \wedge p(M)\times dS\,(-\vec{n})$$

## Modèle global




$$\overrightarrow{M^A(\vec{F})} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}$$

***L'association des deux vecteurs***

$\vec{F}$ ***et*** $\overrightarrow{M^A(\vec{F})}$

***permet de définir complètement toute action mécanique.***

→ ***utilisation de l'outil torseur***

# FIN DE LA

# PREMIERE PARTIE

# 4) Action mécanique de la pesanteur

- ***Hypothèses :***

  - *les solides sont supposés homogènes.*

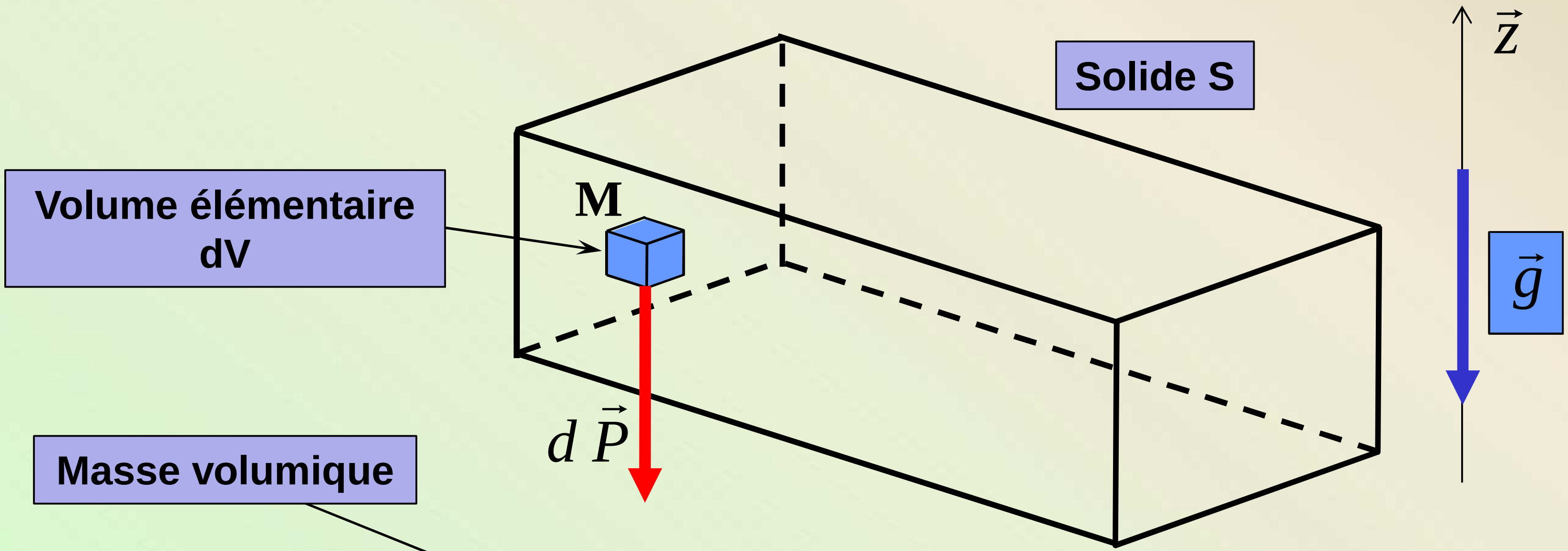
  - *l'accélération de la pesanteur (notée g, exprimée en m/s²) est supposée uniforme, constante et de direction verticale descendante.*

$$g = 9{,}81\ m/s^2 \quad ou \quad 9{,}8\ m/s^2 \quad ou \quad 10\ m/s^2$$

- ***Champ de pesanteur :*** *la pesanteur exerce une action mécanique à distance, elle se manifeste par un champ d'accélération (uniforme et constant).*

**Modèle local :** *le champ de pesanteur produit en tout point M du solide S de volume V une force élémentaire $\overrightarrow{dP}$ appliquée en M et proportionnelle à la masse dm du volume élémentaire dV entourant M.*

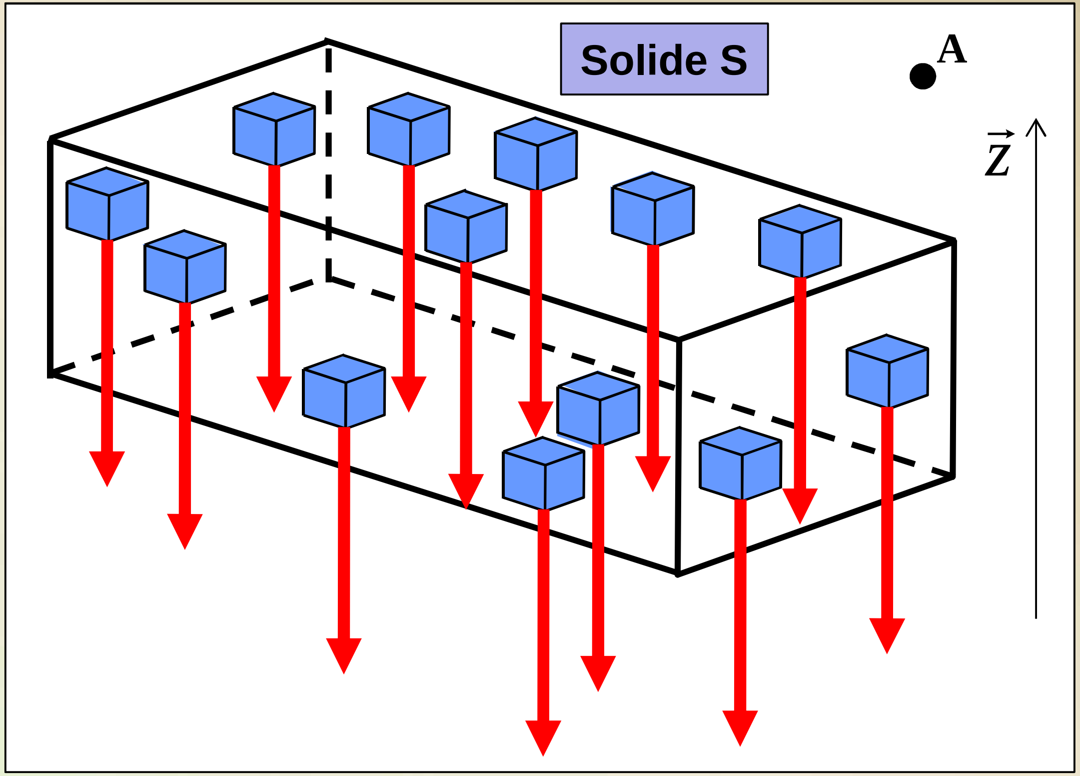
$$d\vec{P} = dm\,\vec{g}$$




$$d\vec{P} = dm\,\vec{g} = \rho \times dV \times g\,(-\vec{z})$$

***On a une infinité d'éléments de volume dV :***

$$d\,\vec{P} = \rho \times dV \times g\,(-\vec{z})$$




## ***Force résultante :***

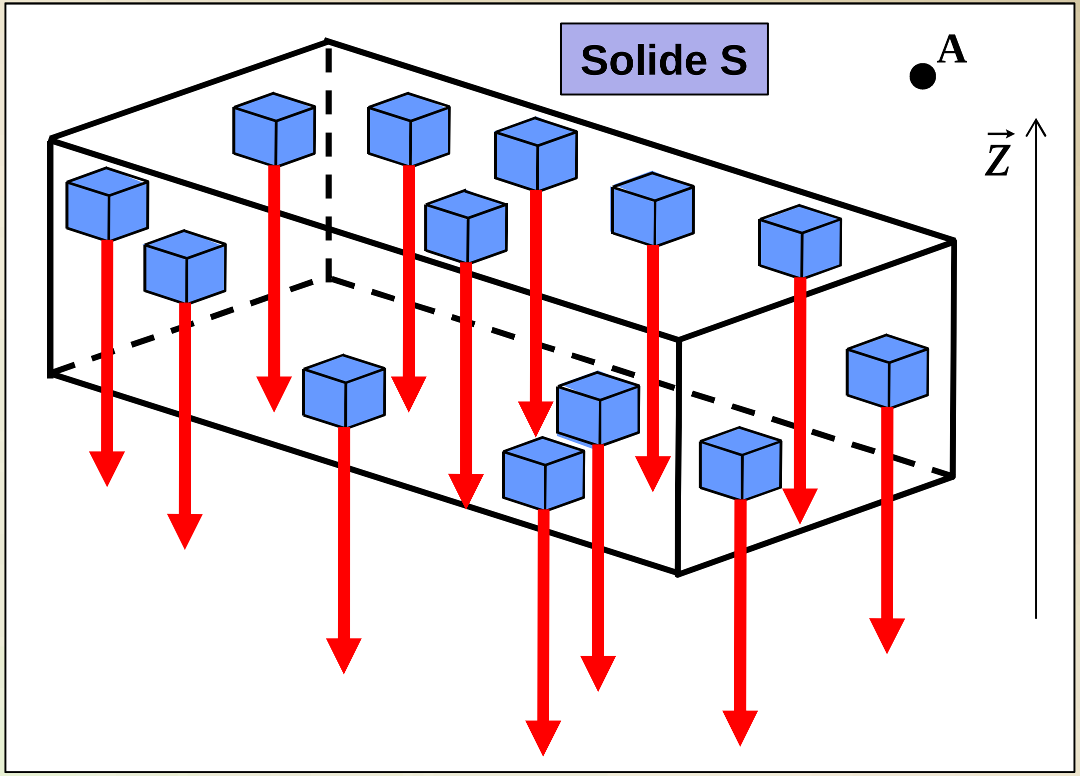
$$\overrightarrow{F_{pesanteur\ \rightarrow solide\ S}} = \vec{P} = \iiint_{Vol} d\,\vec{P} = \iiint_{Vol} \rho \times dv \times g\ (-\vec{z})$$

## ***Moment résultant écrit en A (point quelconque) :***

$$\overrightarrow{M^{A}_{pesanteur\ \rightarrow solide\ S}} = \iiint_{Vol} \overrightarrow{AM} \wedge d\,\vec{P} = \iiint_{Vol} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \times dv \times g\ (-\vec{z})$$

***On a une infinité d'éléments de volume dV :***

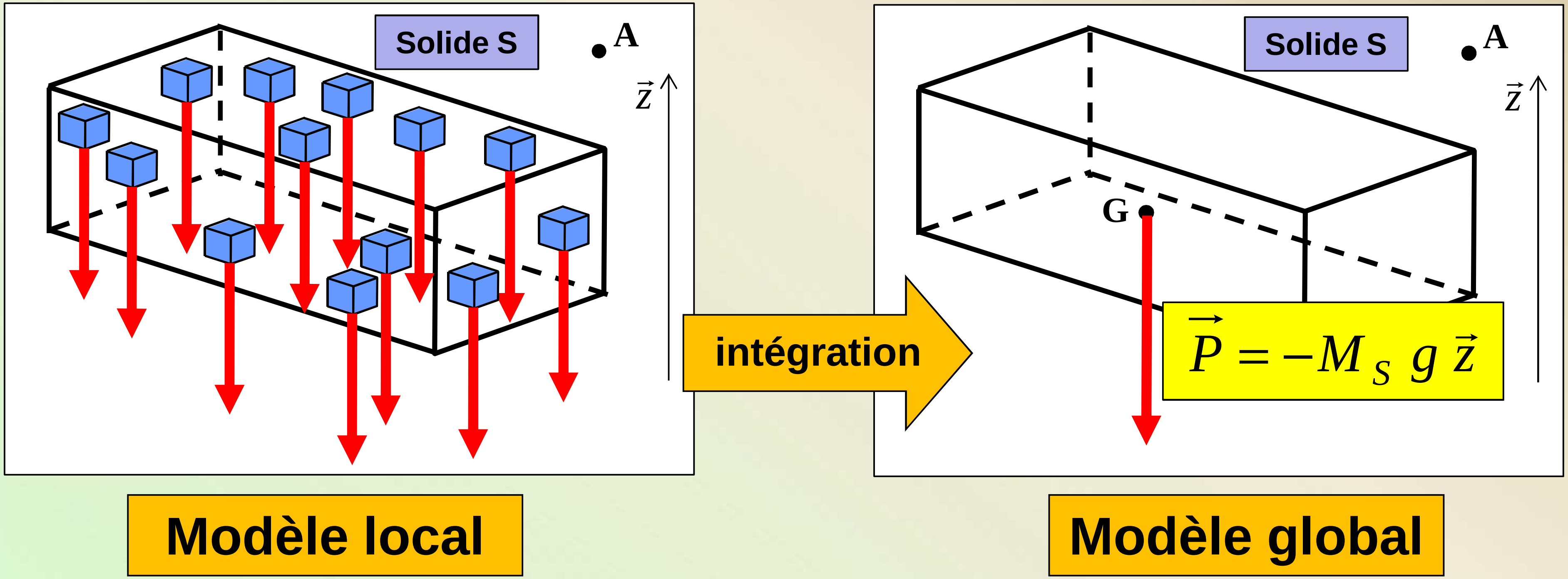
$$d\,\vec{P} = \rho \times dV \times g\left(-\vec{z}\right)$$



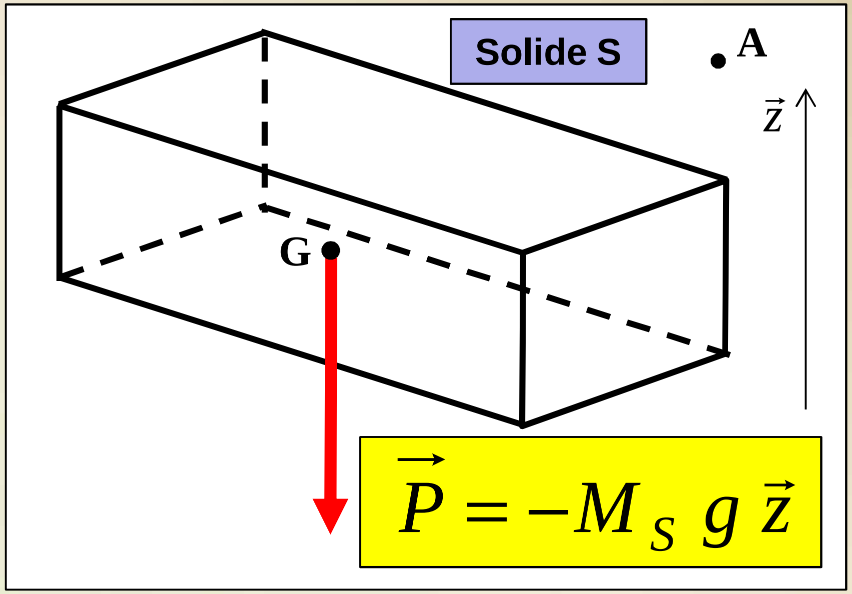

***Torseur de l'action mécanique de la pesanteur écrit en A :***

$$\left\{F_{pes \to S}\right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{pes \to S}} \\ \overrightarrow{M^{A}_{pes \to S}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \iiint_{Vol} \rho \times dv \times g\,\left(-\vec{z}\right) \\ \iiint_{Vol} \overrightarrow{AM} \wedge \rho \times dv \times g\,\left(-\vec{z}\right) \end{array} \right\}_A$$

**<u>Modèle global :</u>** ***faisons l'intégration de l'ensemble (infini) des actions mécaniques élémentaires agissant sur tout le solide S.***



## Modèle global

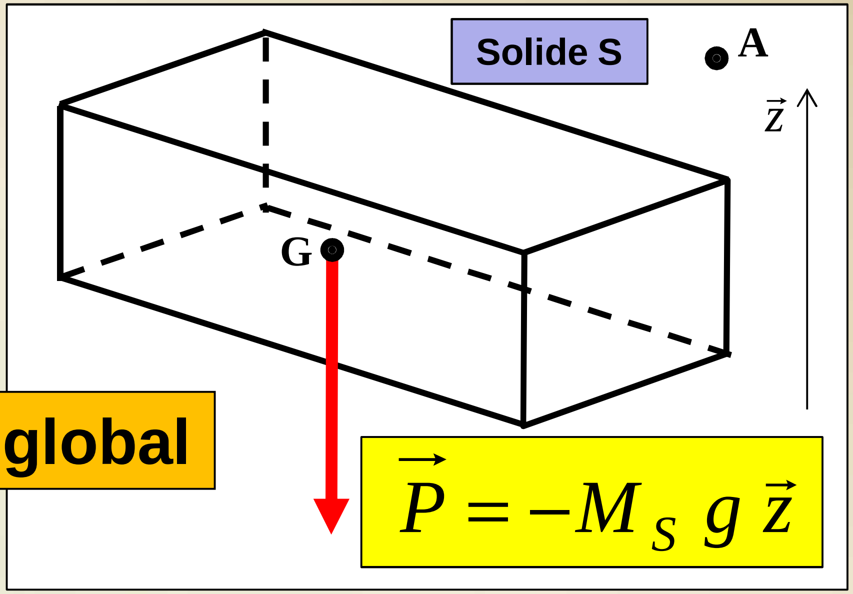



$$\overrightarrow{P} = -M_S\, g\, \vec{z}$$

***<u>Torseur de l'action mécanique de la pesanteur écrit en A :</u>***

$$\left\{ F_{pes \to S} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{pes \to S}} = \overrightarrow{P} = -M_S\, g\, \vec{z} \\ \overrightarrow{M^A_{pes \to S}} = \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P} \end{matrix} \right\}_A$$

# 5) Centre de gravité



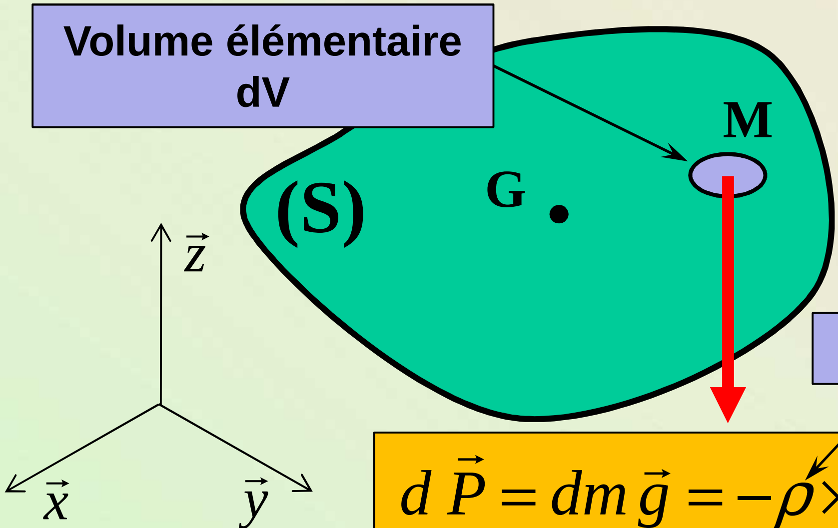

Modèle global

$$\vec{P} = -M_S\, g\, \vec{z}$$

***Il est possible de définir un point particulier (noté G et appelé centre de gravité) tel que :***

$$\{F_{pes \to S}\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{pes \to S}} = \vec{P} = -M_S\, g\, \vec{z} \\ \overrightarrow{M^G_{pes \to S}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

***Définition :*** *on appelle centre de gravité d'un solide S, le point G (unique et fixe dans S) tel que :*




M : point courant décrivant complètement le solide S

$$\iiint_S \overrightarrow{GM} \times dm = \vec{0}$$

$\rho\, dv$


Masse volumique

$$d\,\vec{P} = dm\,\vec{g} = -\rho \times dV \times g\,\vec{z}$$

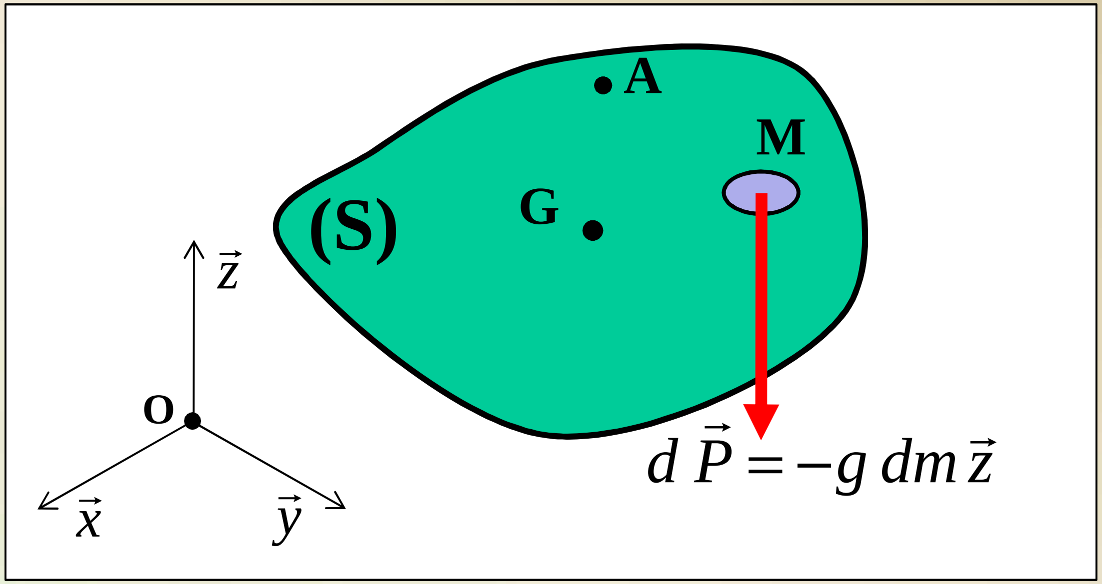
***si solide homogène :*** *centre de masse = centre de volume*

***si g est constant :*** *centre de masse = centre de gravité*

## ***Propriétés :***

***Symétrie matérielle :*** ***s'il existe, pour un solide S, un élément de symétrie (plan, axe), d'un point de vue répartition des masses, le centre de gravité G appartient alors à cet élément de symétrie.***

# Position : soit un point A quelconque :




$$\iiint_S \overrightarrow{GM} \times dm = \iiint_S \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}\right) \times dm$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{GA} \times \iiint_S dm + \iiint_S \overrightarrow{AM} \times dm \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{\iiint_S \overrightarrow{AM} \times dm}{Ms}}$$

$M_S$

On peut aussi prendre l'origine O du repère

***Associativité :*** ***pour un ensemble de n solides $S_i$ de masse respective $m_i$ et de centre d'inertie $G_i$, on a :***

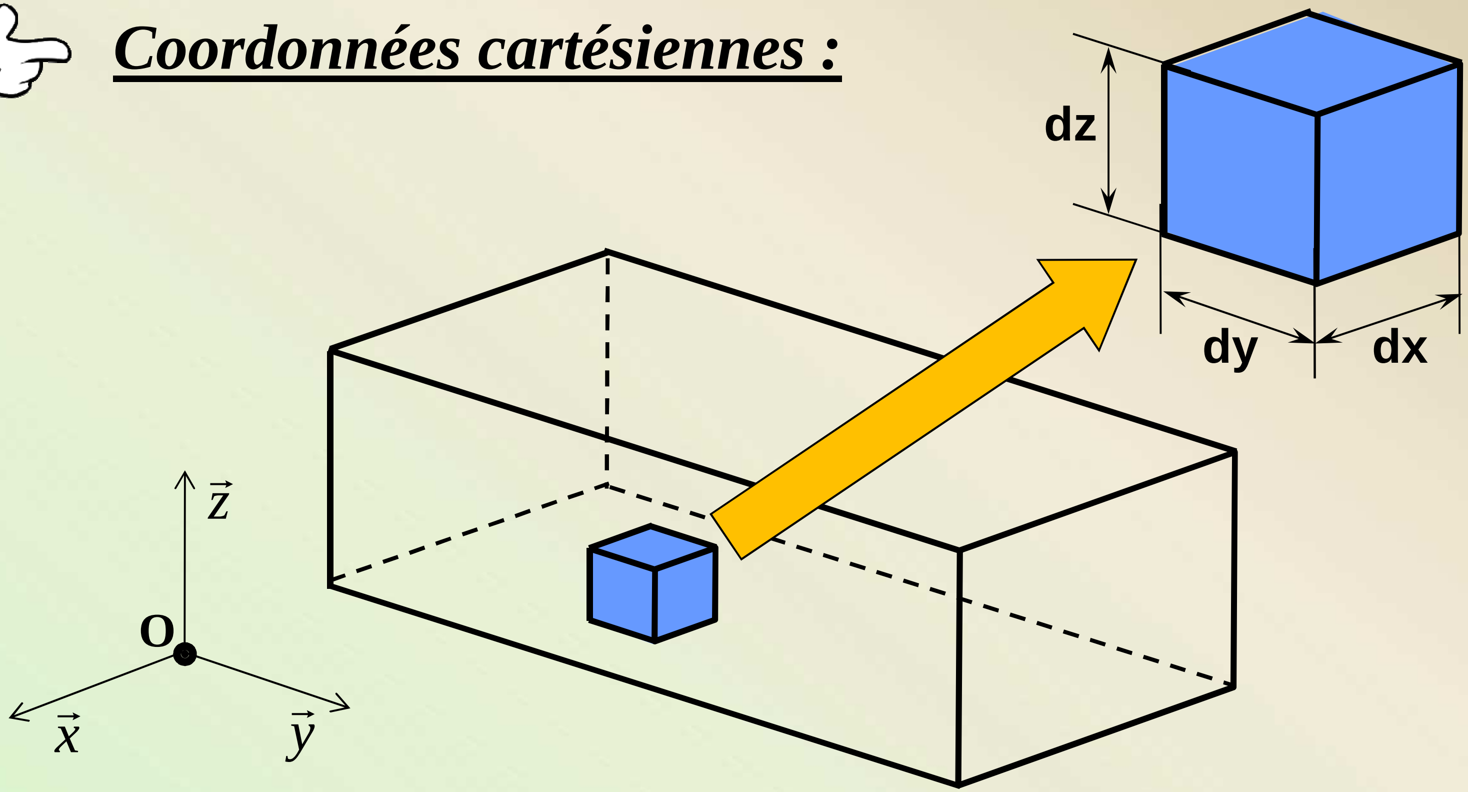
$$\overrightarrow{AG} = \frac{\sum_1^n \left(m_i \times \overrightarrow{AG_i}\right)}{\sum_1^n m_i}$$

On peut aussi prendre l'origine O du repère

***masse totale $M_S$***

# Calcul d'intégrales triples :

## Coordonnées cartésiennes :

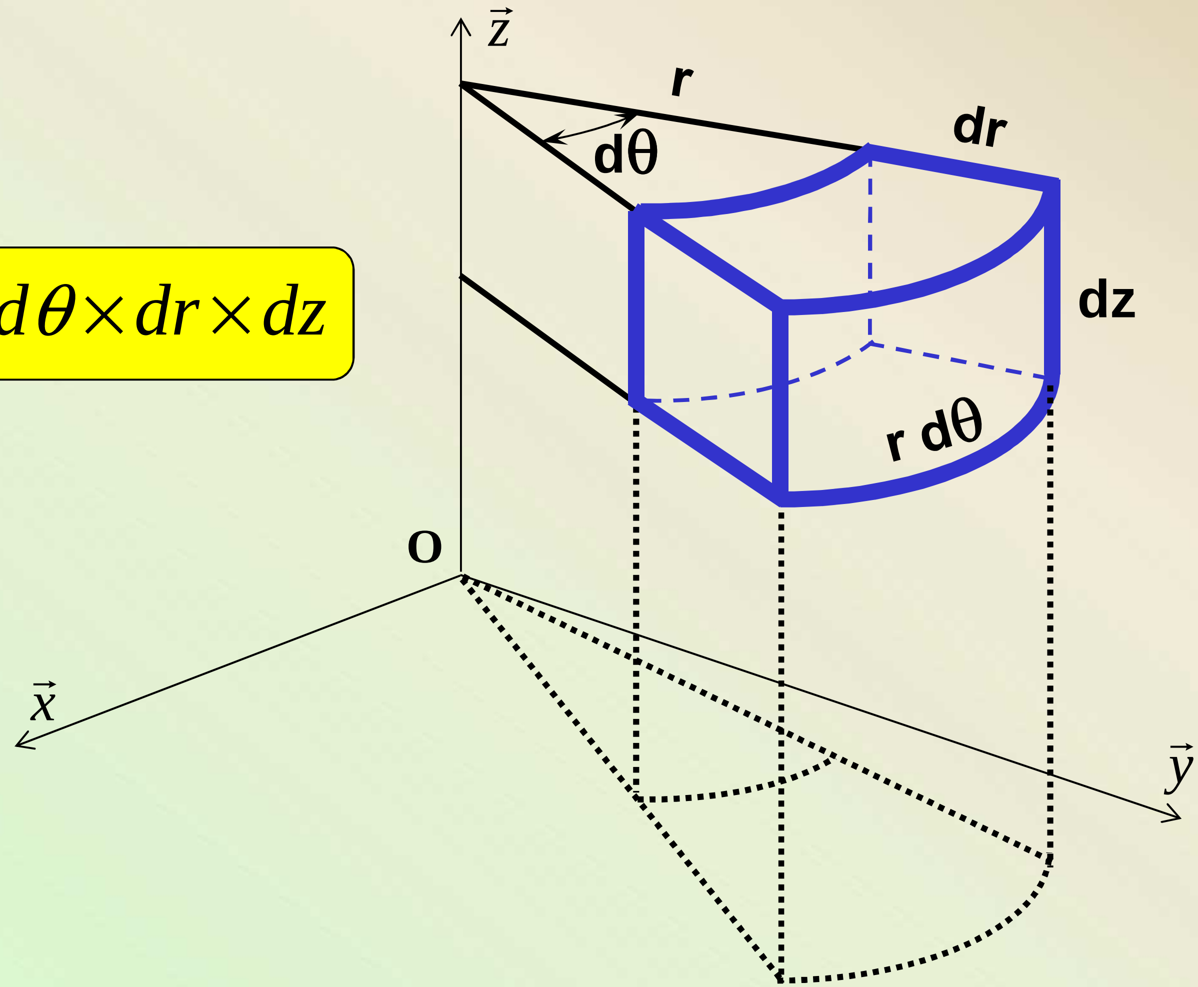



$$dV = dx \times dy \times dz$$

# Calcul d'intégrales triples :

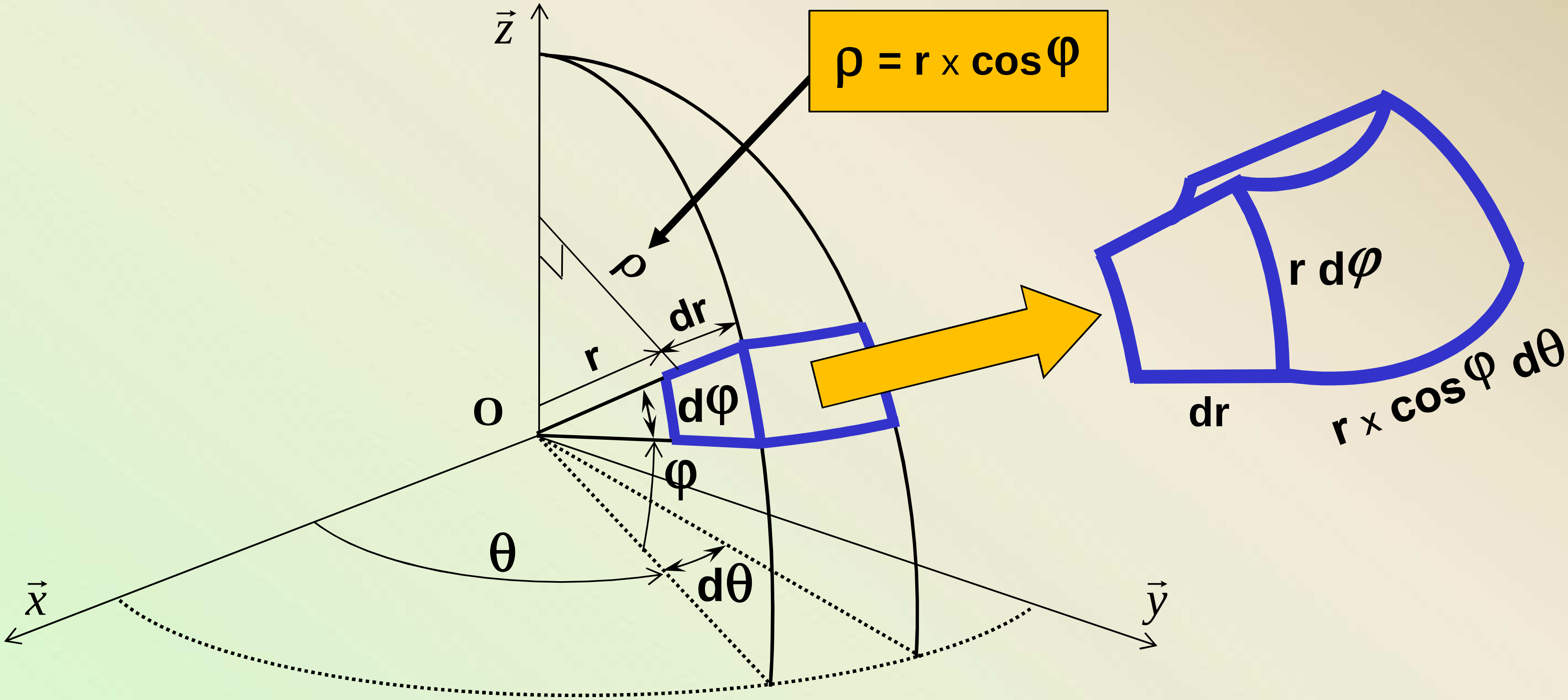
## Coordonnées cylindriques :

$$dV = r\,d\theta \times dr \times dz$$



## Calcul d'intégrales triples :

### Coordonnées sphériques :




$$dV = r\,d\varphi \times \rho\,d\theta \times dr$$

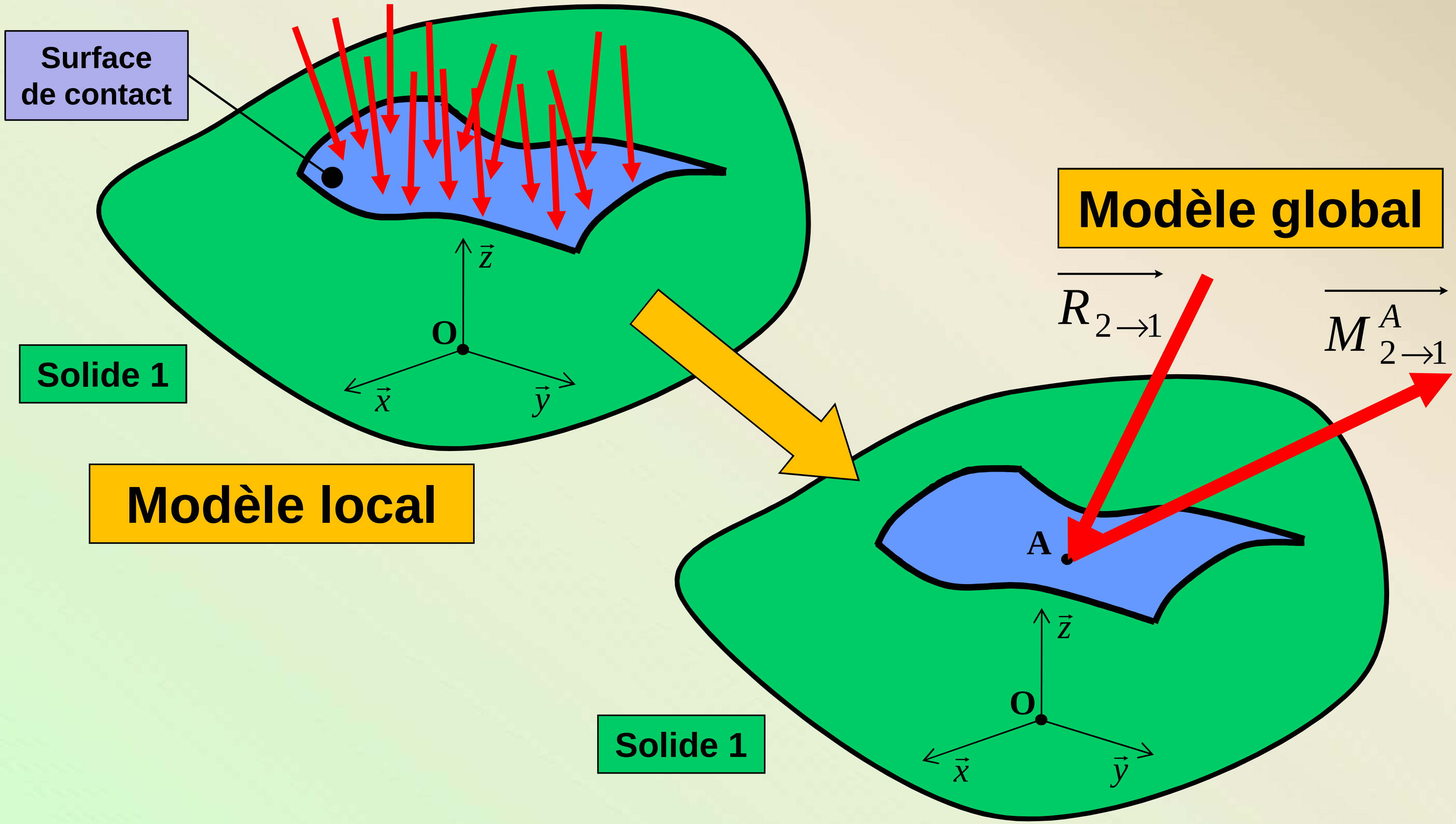
$$dV = r^2 \times \cos\varphi \times d\varphi \times d\theta \times dr$$

# 6) Action mécanique de contact

## ▶ Hypothèses :

- *Le contact est supposé sans frottement.*
- *La « surface » de contact peut être un point, une ligne (quelconque) ou une surface.*

***Modélisation locale et globale :*** ***on suppose isoler un solide 1 et étudier l'action mécanique de contact d'un solide 2 sur ce solide 1.***



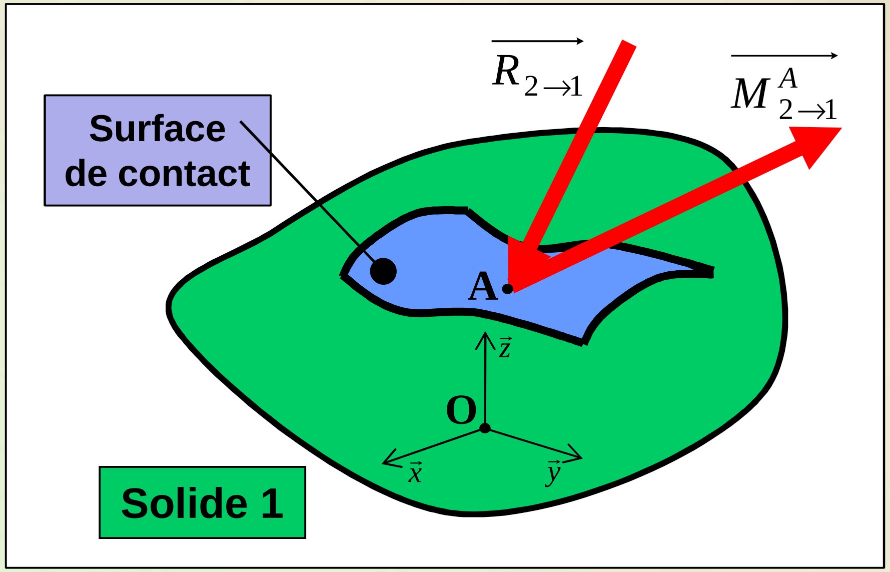
## Modèle local

$$\{ F_{2\rightarrow 1} \}_A = \left\{ \begin{array}{c} \iint_{surf} d\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \\ \iint_{surf} \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \end{array} \right\}_A$$

Point courant de la surface de contact

## Modèle global

$$\{ F_{2\rightarrow 1} \}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{2\rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M^A_{2\rightarrow 1}} \end{array} \right\}_A$$



**FIN**