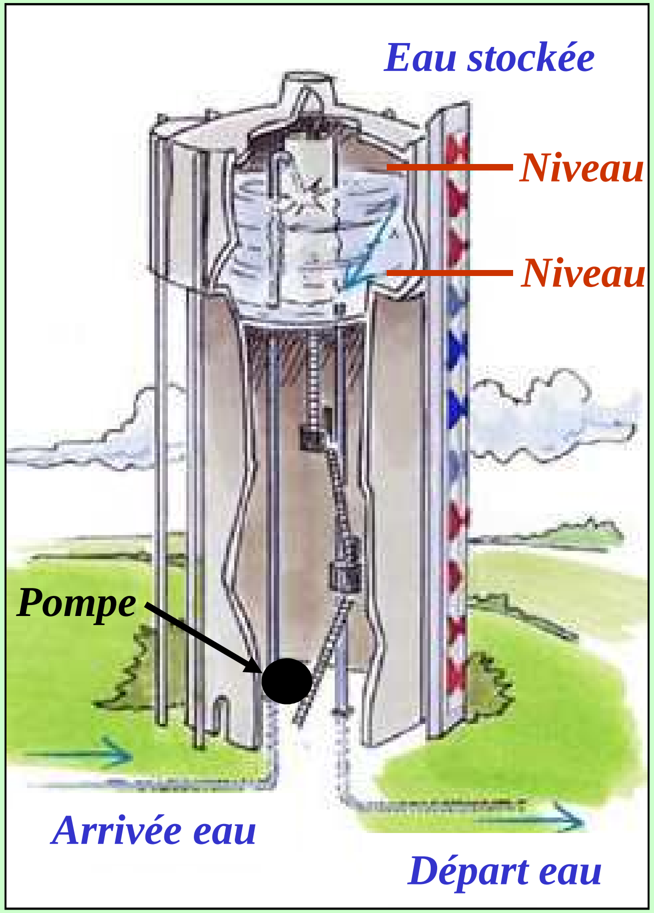
STABILITE

Etude d'exemples

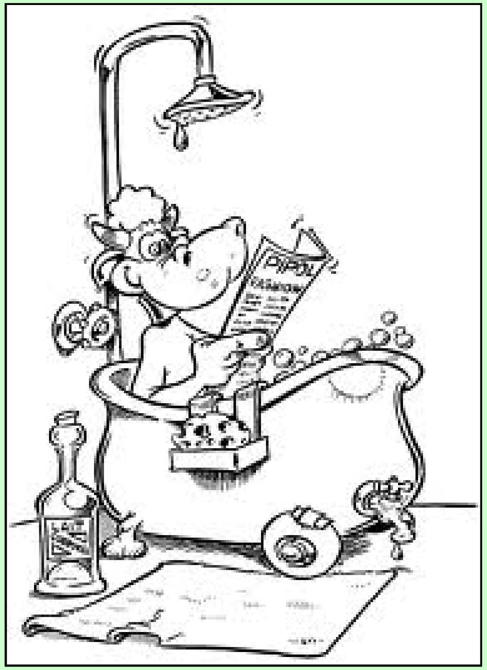
Système intégrateur

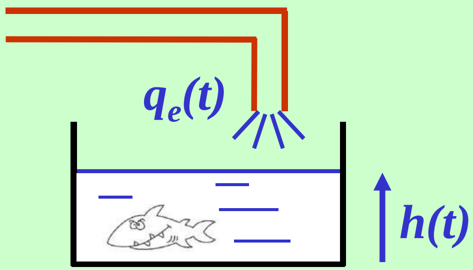
1^er exemple



régulation

Autre exemple





- ***variable d'entrée :*** $q_e(t)$
- ***variable de sortie :*** $h(t)$
- ***paramètre :*** S

1^{er} exemple

1) Equation différentielle :

si pas de pertes

Quantité d'eau rentrante ⇒ *fait monter niveau d'eau*

$$q_e\,.dt \Rightarrow S\,.dh$$

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{q_e(t)}{S}}$$

2) Fonction de transfert :

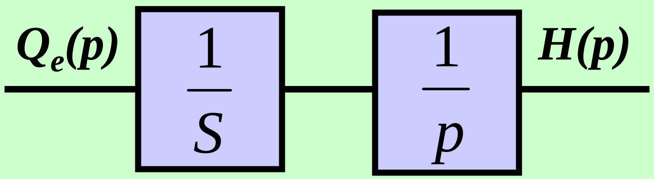
la fonction de transfert traduit l'évolution du système depuis une position d'équilibre donc les c.i. sont supposées nulles

$$p.H(p) - \cancel{h_{(t=0)}} = \frac{Q_e(p)}{S} \Rightarrow p.H(p) = \frac{Q_e(p)}{S}$$

soit

$$\boxed{FT(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \underbrace{\frac{1}{S}}_{\text{action proportionnelle}} . \underbrace{\frac{1}{p}}_{\text{intégrateur}}}$$

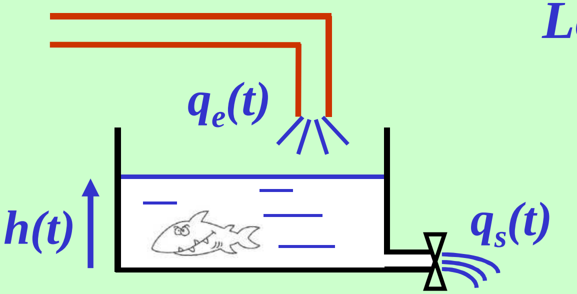
d'où



Système instable !

Système non linéaire

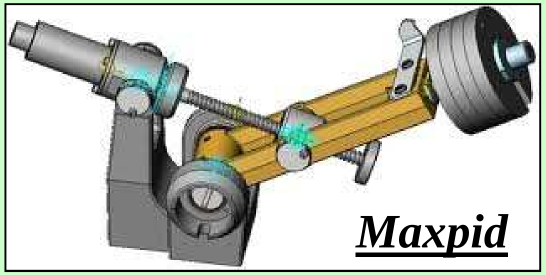
$2^{ème}$ exemple



Le même que précédemment mais avec fuite

Hyp: $q_s(t) = \alpha\sqrt{h}$

Autre exemple



eau rentrante - eau sortante ⇒ *variation du niveau d'eau*

$q_e\,.dt \qquad q_s\,.dt \quad \Rightarrow \quad S\,.dh$

$$\Rightarrow \quad q_e(t) - \alpha.\sqrt{h(t)} = S\,.\frac{dh(t)}{dt}$$

d'où

$$\boxed{S\,.\frac{dh(t)}{dt} + \alpha.\sqrt{h(t)} = q_e(t)}$$

sortie

entrée

Système non linéaire mais stable !

tout au moins relativement à l'entrée en échelon

Plusieurs définitions de stabilité

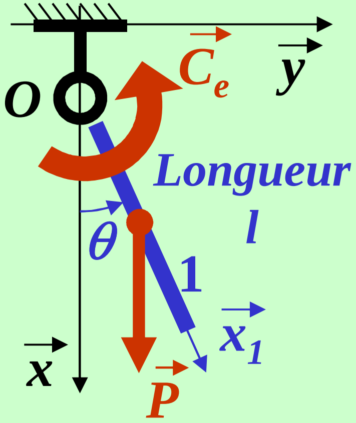
3ème exemple

Exemple d'un pendule rigide :

On suppose appliquer un couple extérieur $C_e(t)$ et la liaison pivot est parfaite

Bâti 0

PFD appliqué à la tige, moments en O, en projection sur l'axe de rotation



$$C_e - m\,g\,\frac{l}{2}\sin\theta = I_{O\vec{z}}\,\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{O\vec{z}}\,\ddot{\theta} + m\,g\,\frac{l}{2}\sin\theta = C_e}$$

Linéarisation : *si θ petit*

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{O\vec{z}}\,\ddot{\theta}(t) + m\,g\,\frac{l}{2}\,\theta(t) = C_e(t)}$$

Entrée en échelon : *$C_e(t) = cte > m.g.l/2$*

⇒ *le pendule tourne indéfiniment : θ tend vers l'infini*

système instable

Entrée impulsionnelle : *le pendule oscille indéfiniment mais θ reste borné*

stabilité au sens large

Si frottement dans la pivot : *le pendule oscille mais θ tend vers 0*

stabilité asymptotique

- ► *$\theta = 0$ équilibre stable au sens asymptotique*
- ► *$\theta = \pi$ équilibre instable ou stable au sens large (car ne diverge pas)*

☞ ***1)- <u>NOTION DE STABILITE</u>***

☞ ***2)- <u>CONDITIONS DE STABILITE</u>***

☞ ***3)- <u>CAS DES SYSTEMES ASSERVIS</u>***

☞ ***4)- <u>CRITERE DU REVERS</u>***

1) NOTION DE STABILITE

a) Généralités :

La stabilité d'un système (asservi ou non) revêt une importance toute particulière.

C'est en fait la première condition de bon fonctionnement, sauf cas particulier tel que : explosifs

Plusieurs définitions de la stabilité peuvent être énoncées.

D'un point de vue qualitatif on dira qu'un système est stable si, écarté de sa position d'équilibre par une perturbation non divergente :

- la variable de sortie ne diverge pas

→ ***définition au sens large***

On dit aussi :

" à entrée bornée correspond une sortie bornée "

- il tend à y revenir

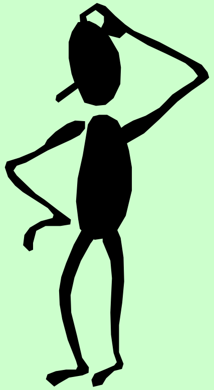
→ ***définition à tendance asymptotique***

À noter qu'un système stable peut très bien diverger en réponse à une entrée divergente

Par contre, dans le cas des systèmes linéaires on a les résultats suivants :

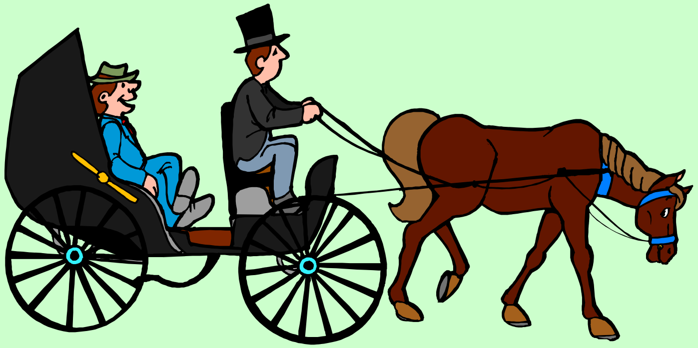
- ***pour une entrée constante (échelon) il n'y a qu'un seul point d'équilibre (pour la sortie).***
- ***la notion de stabilité est indépendante de l'entrée considérée.***

<u>Nota :</u> ne pas confondre système stable et convergence de la sortie.

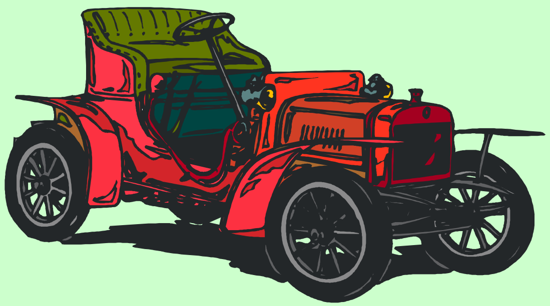


b) Exemples :

Voiture traction avant → stable



Voiture propulsion arrière → instable



2) CONDITIONS DE STABILITE

a) Condition nécessaire et suffisante de stabilité :

Pour un système linéaire la stabilité étant indépendante du signal d'entrée, il suffit d'étudier l'équation différentielle représentative du système :

sortie

$$a_0 . s(t) + a_1 . \frac{ds(t)}{dt} + a_2 . \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + ...+ a_n . \frac{d^n s(t)}{dt^n}$$

$$= b_0 . e(t) + b_1 . \frac{de(t)}{dt} + b_2 . \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + ...+ b_m . \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

entrée

Nota: $\boxed{m < n}$

La fonction de transfert est donc:

$$FT(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1.p + \ldots + b_m.p^m}{a_0 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n}$$

Utilisons comme définition de stabilité pour un système linéaire que sa réponse <u>impulsionnelle</u> tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

La transformée de Laplace de l'impulsion (Dirac) vaut 1 :

$\Longrightarrow$ $E(p) = 1$ d'où $\boxed{FT(p) = S(p)}$

Désignons par $p_1\ p_2 \dots p_q$ les pôles de la fonction de transfert et $\alpha_1\ \alpha_2\ \dots \alpha_q$ leur ordre de multiplicité respectif.

On peut alors montrer que la réponse impulsionnelle est de la forme :

$$\boxed{s(t) = \sum_{i=1}^{q} Q_i(t).e^{p_i.t}}$$

où $Q_i(t)$ est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $\alpha_i - 1$

Notons $p_i = \sigma_i \pm i.\omega_i$ *les racines complexes conjuguées*

et $p_i = \lambda_i$ *les racines réelles de ce polynôme* $Q_i(t)$,

la réponse impulsionnelle est donc de la forme :

$$s(t) = \sum_i Q_i(t).e^{\lambda_i.t} + \sum_i Q_i(t).e^{\sigma_i.t}.\cos(\omega_i.t + \varphi_i)$$

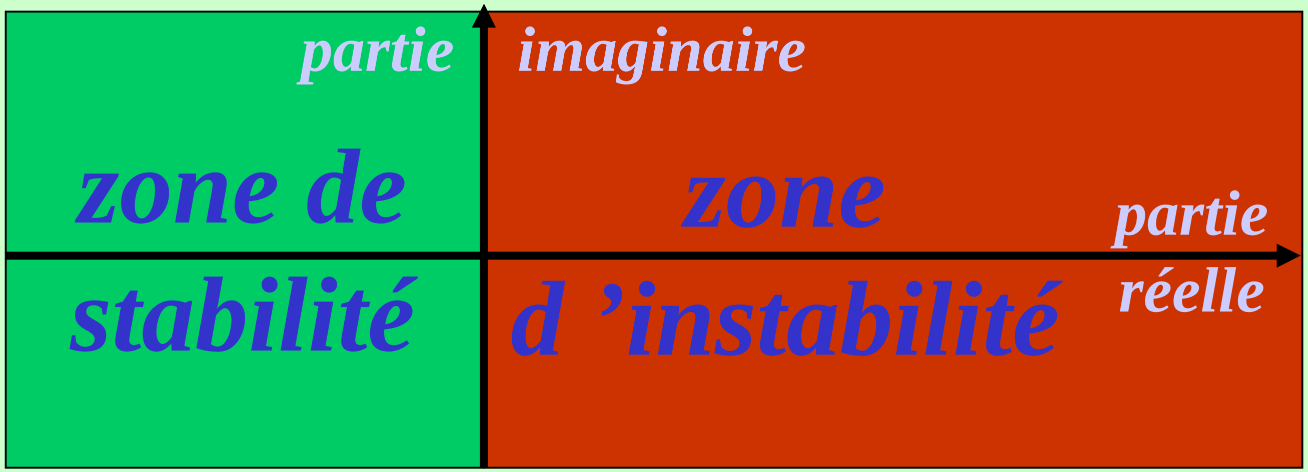
réelle *imaginaire*

racines réelles

racines complexes

A partir de cette expression il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que la sortie s(t) tend vers zéro quand $t \to \infty$ ***est que les parties réelles*** λ_i ***et*** σ_i ***des pôles de FT(p) soient strictement négatives.***

Enoncé : ***un système linéaire est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont tous à partie réelle strictement négative***



Nota:

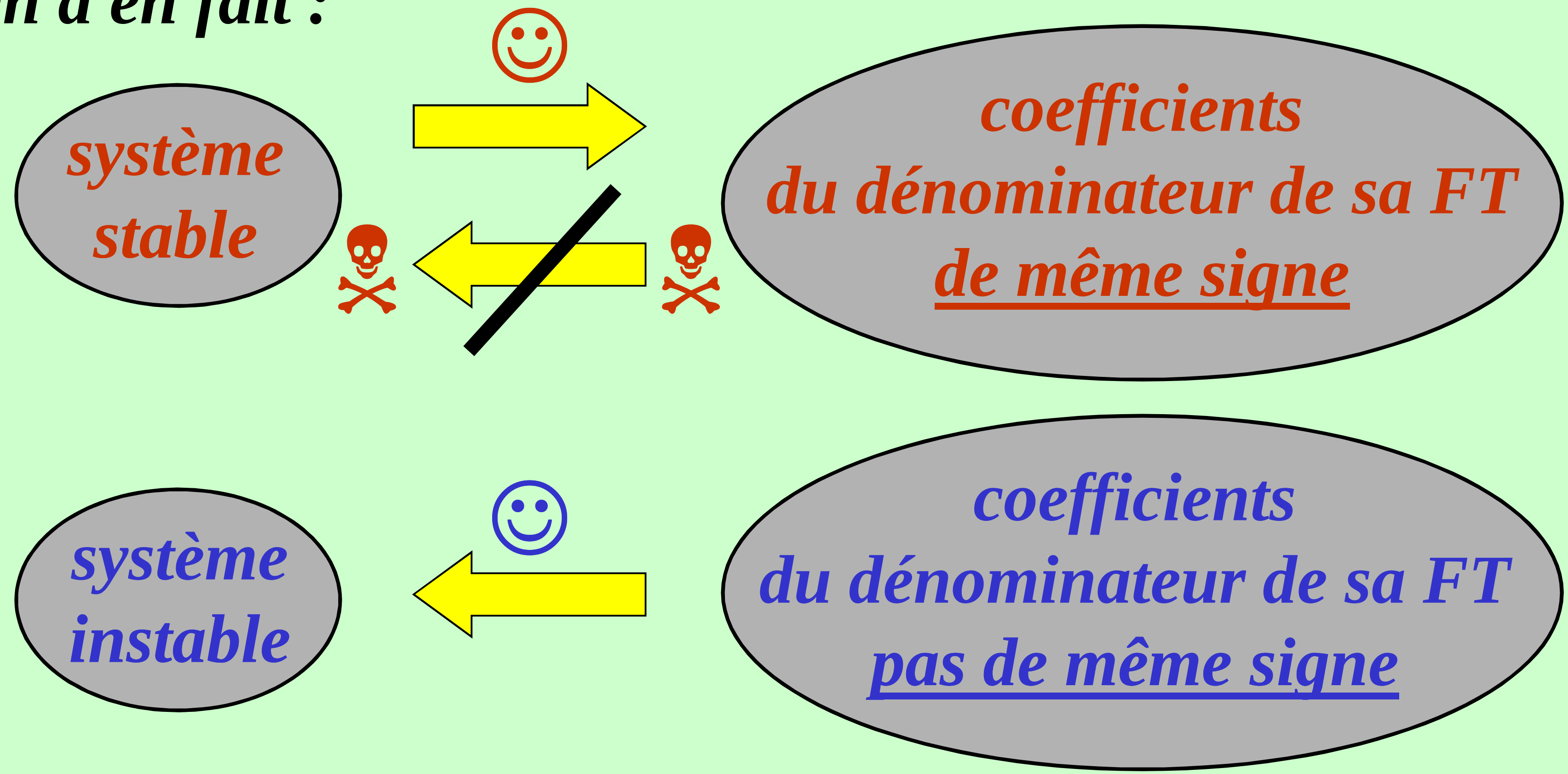
☞ ***si le système est asservi, il s'agit de sa fonction de transfert en boucle fermée FTBF***

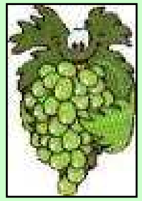
☞ ***si un pôle est nul le système est instable.***

b) Condition nécessaire :

On démontre qu'un système stable a obligatoirement tous les coefficients du dénominateur de sa fonction de transfert de même signe (et sans terme manquant).

On a en fait :





c) Conclusion :

Pour les systèmes d'ordre 1 ou 2 la condition de même signe pour les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert est une

condition nécessaire et suffisante

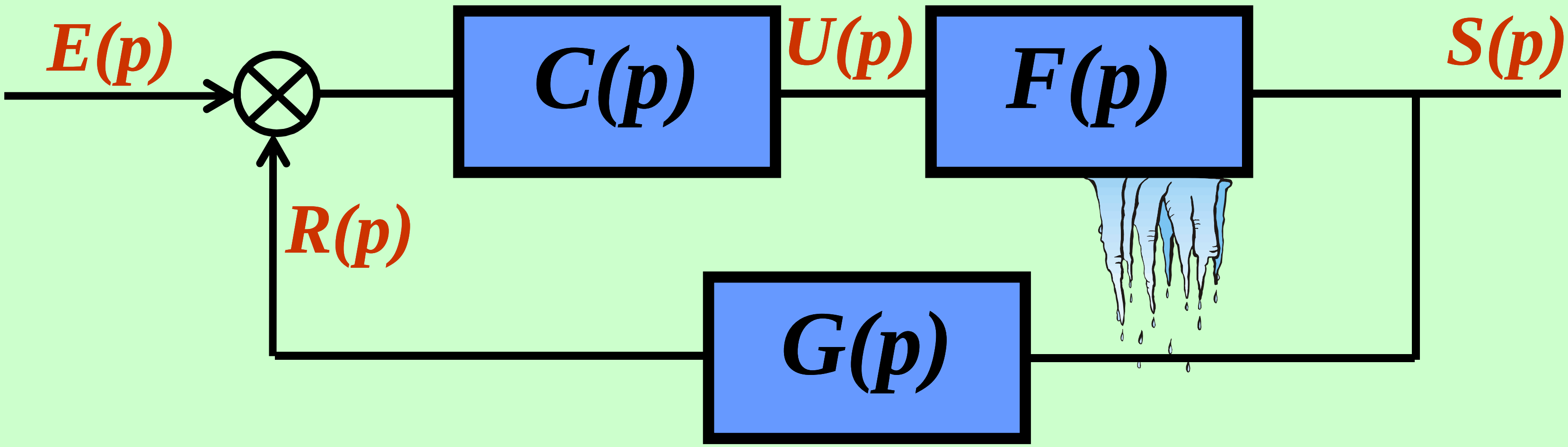
Pour les autres systèmes (ordre >2) c'est une simple

condition nécessaire

FIN DE LA PREMIERE PARTIE

3) CAS DES SYSTEMES ASSERVIS

a) Cas général d 'un asservissement :



- **F(p)** ***représente le système à étudier.***
- **C(p)** ***représente le correcteur permettant d'assurer un comportement optimal de l 'ensemble.***
- **G(p)** ***représente le capteur placé dans la boucle retour.***

A noter que si celui-ci est supposé parfait, on a alors :

$$G(p) = 1 \quad \text{et donc} \quad R(p) = S(p)$$

b) Remarques préliminaires :

☞ ***il ne suffit pas que chacun des blocs soit stable pour que l'ensemble le soit.***

→ ***un système stable en BO peut être instable en BF***

☞ ***l'un des blocs peut être instable, par exemple F(p), alors que l'ensemble bouclé est stable.***

☞ ***par contre, en BO, si l'un des blocs est instable alors l'ensemble de la BO devient instable.***

c) Equation caractéristique d 'un système bouclé :

La fonction de transfert du système bouclé vaut :

$$FTBF(p) = \frac{F}{1+F.G} = \frac{C(p).F(p)}{1+C(p).F(p).G(p)}$$

Nous avons vu précédemment que l'étude de la stabilité du système bouclé (asservi) revient à étudier les pôles du dénominateur de la FTBF, autrement dit les racines de l'équation :

FTBO

$$1 + C(p).F(p).G(p) = 0$$

$$1 + FTBO\,(p) = 0$$

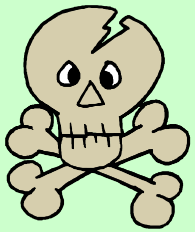
Cette équation est appelée <u>équation caractéristique</u> du système bouclé.

Les racines de cette équation doivent donc toutes être à partie réelle strictement négative.

La stabilité est perdue dès que l'une de ces racines devient à partie réelle nulle (imaginaire pur) ou positive.

4) CRITERE DU REVERS

a) But :



L'idée consiste à étudier la stabilité non plus de façon arithmétique à partir de la FTBF, mais d'utiliser des critères graphiques sur les tracés en réponse harmonique de la FTBO.

Les méthodes graphiques ont l'avantage d'être généralement bien plus rapides que celles algébriques.

PRINCIPE

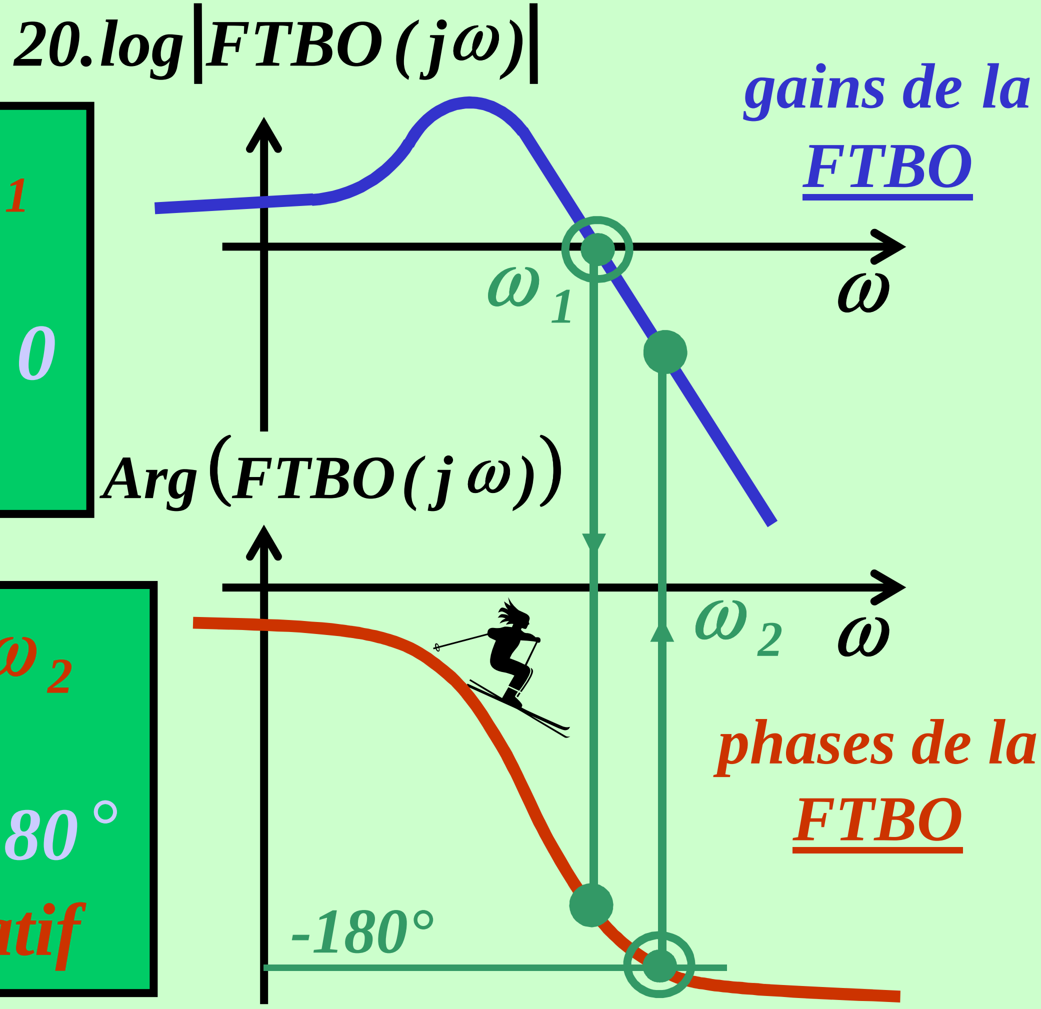
Étudier les réponses harmoniques de la FTBO pour en conclure des renseignements sur la stabilité en FTBF

b) Critère du Revers dans les lieux de Bode :

énoncé

si pour la pulsation ω_1
telle que :
$$20.\log\left|FTBO(j\omega_1)\right| = 0$$
on a $\varphi > -180°$

et si pour la pulsation ω_2
telle que :
$$Arg\left(FTBO(j\omega_2)\right) = -180°$$
on a un gain en dB négatif



alors le système est stable en **boucle fermée**

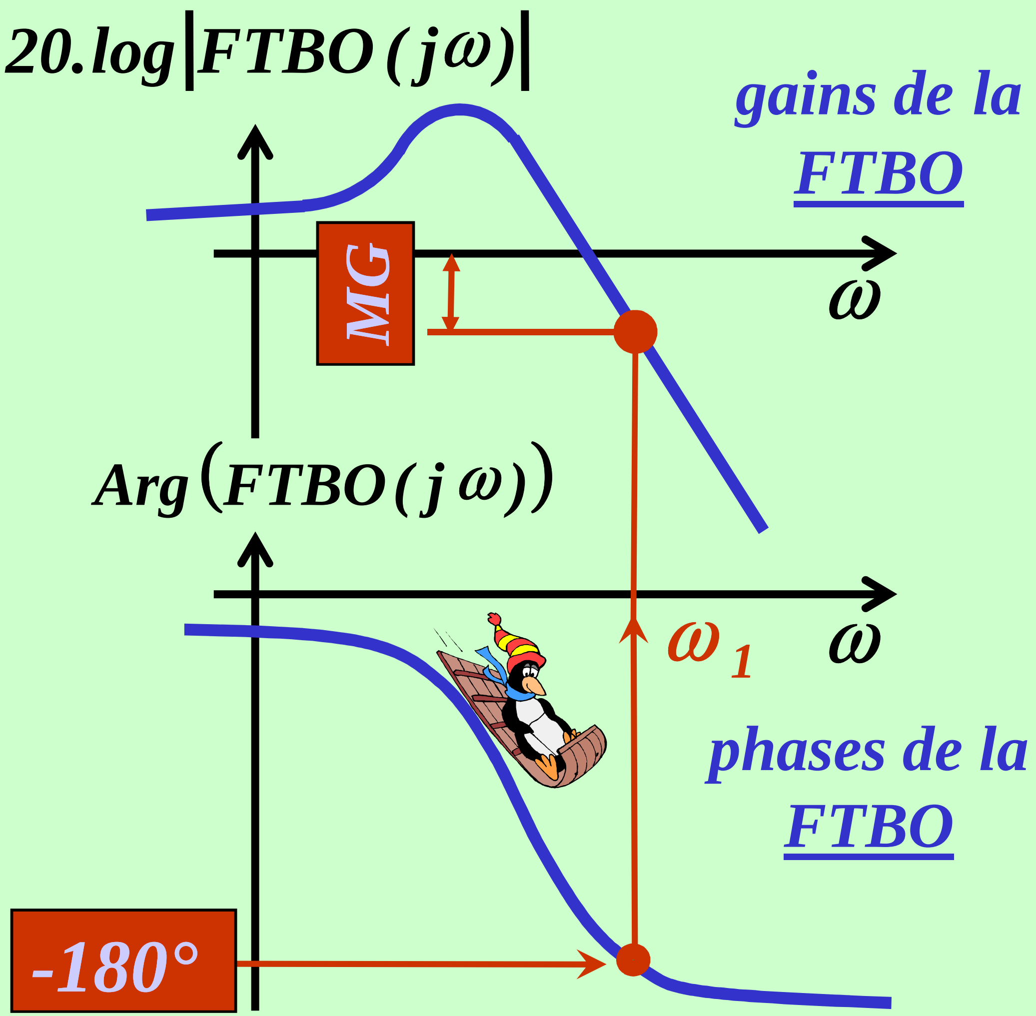
c) Marges de stabilité :

L'objectif est d'assurer un réglage donnant une certaine " robustesse " à l'asservissement.

En effet, si l'on se place juste à la limite de la stabilité, une faible modification des caractéristiques du système peut suffire à le rendre instable (usure, vieillissement…).

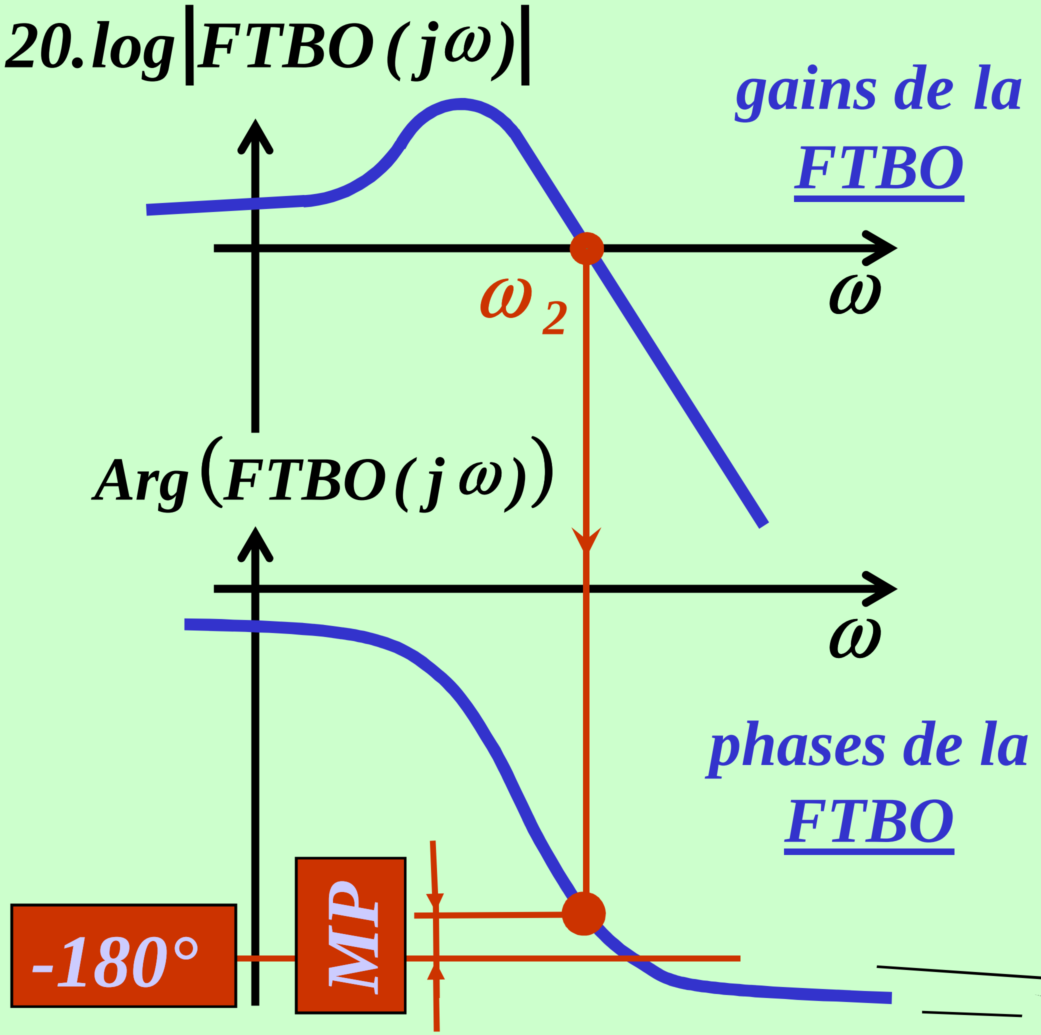
→ ***Il faut donc prendre une marge de sécurité par rapport à la limite de la stabilité***

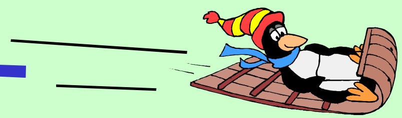
MARGE DE GAIN



En général on se fixe une marge de gain de 6 à 12 dB

MARGE DE PHASE





En général on se fixe une marge de phase de 45°

FIN