

ψ^* 2016 : TD des 27 et 29 mars (semaine 24)

Variables aléatoires

1. Marche aléatoire dans \mathbb{Z}^2 .

Un point, initialement en $(0, 0)$, se déplace par sauts successifs de longueur 1 dans chacune des 4 directions équiprobables. On note $Z_n = (X_n, Y_n)$ sa position après n sauts.

a. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

b. Sans calculer la loi de X_n , calculer son espérance et sa variance.

c. Calculer l'espérance de $\|Z_n\|_2^2$, et majorer l'espérance de $\|Z_n\|_2$.

d. Calculer la probabilité que $Z_n = (0, 0)$ (retour à l'origine).

Le résultat fait intervenir une somme de carrés de coefficients binomiaux.

e. Calculer de deux manières le DSE de $(1+x)^n(1+x)^m$ et en déduire une formule explicite pour $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{n-k}$ (formule de VDM).

f. En déduire une formule explicite pour $P(Z_{2p} = (0, 0))$, et un équivalent quand $p \rightarrow \infty$.

SDL1

1. Résoudre, sur un intervalle maximal à préciser, le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + y + z + id \\ y' = -2x - 2y - z \\ z' = 2x + 3y + 2z \end{cases} \quad \text{où } id \text{ est l'identité}$$

Indication : il existe une solution où x, y, z sont affines.

EDL2

1. $E : x^2 y'' - 4xy' + (6 + x^2)y = x^4 \cos x$ (x est la variable, y est l'expression de la fonction inconnue, à valeurs réelles).

a. Déterminer les intervalles où le théorème structurel s'applique. Sur ces intervalles, justifier le changement de fonction $z = x^{-2}y$.

b. L'utiliser pour résoudre E sur les intervalles en question.

c. Trouver l'ensemble des solutions sur \mathbb{R} , préciser sa structure algébrique et sa dimension.

d. Trouver les solutions sur \mathbb{R} du problème de Cauchy $(E, f(0) = f'(0) = 0)$.