

ψ^* 2016 : TD des 20 et 22 mars (semaine 23)

Variables aléatoires, couples aléatoires

1. Le nombre quotidien N de clients d'un supermarché suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
Ce magasin dispose de n caisses, où les clients se répartissent équiprobablement après leurs achats (irréaliste mais plus simple).
On note X le nombre de clients qui passent par la caisse 1 en une journée. Quelle est sa loi ?
2. X, Y, Z sont des VAD indépendantes. X et Y suivent $\mathcal{P}(\lambda)$, Z suit $\mathcal{P}(\mu)$. On pose $S = X + Z$, $T = Y + Z$.
 - a. Justifier l'existence de $\rho(S, T)$ et le calculer.
 - b. Calculer la loi conditionnelle de Z sachant $S = n$.
 - c. Montrer que Y et S sont indépendantes.
 - d. Calculer l'espérance conditionnelle $E(T | S = n)$.
 - e. Montrer que $E(T | S = n) \geq n \Leftrightarrow E(S) \geq n$.
 - f. La taille d'un individu est la somme de 2 variables aléatoires suivant chacune une loi de Poisson : une variable X dépendant de l'alimentation, et une variable Z dépendant du patrimoine génétique. Ainsi on peut interpréter S comme la taille du père et T comme la taille de son fils (même patrimoine génétique, alimentation différente). Que signifie le résultat précédent ?
3. N est une VAED telle que $R_N > 1$. Les X_i sont des VAED indépendantes et de même loi, telles que $R_{X_1} > 1$. Enfin $S = \sum_{i=1}^N X_i$.
 - a. Montrer que S est une VAED.
 - b. Montrer que sur $[-1, 1]$ au moins, $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.
 - c. En déduire que S admet une espérance et une variance, et les calculer.
 - d. La bactérie EC a un nombre de descendants qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . On considère que tous les individus d'une population de EC sont indépendants. On note Y_n le nombre d'individus de la génération n . Exprimer l'espérance et la variance de Y_{n+1} en fonction de celles de Y_n .
 - e. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
4. On lance une pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois pile. On note X le nombre de lancers effectués. On tire alors équiprobablement un numéro entre 1 et $X - 1$, noté Y .
 - a. Loi de X , espérance, variance.
 - b. Loi de Y , espérance, variance.
 - c. Corrélacion entre X et Y .