ψ^* 2016 : TD des 13 et 15 mars (semaine 22)

Variables aléatoires

1. Un QCM comporte 20 questions, et pour chaque question r réponses possibles dont une seule est juste. Le barême est le suivant :
   - on attribue 1 point par réponse juste ;
   - pour les réponses fausses, le candidat a le droit de proposer une autre réponse et obtient alors $1/2$ point par réponse juste.

   Un candidat totalement ignare répond aléatoirement aux questions, mais il n'est pas assez bête pour refaire 2 fois la même erreur. On note X son score après la première tentative, Y le nombre de bonnes réponses au rattrapage, Z son score final.

   a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

   b. Déterminer la loi de Y et son espérance pour $P\left(. \mid X=j\right)$.

   c. En déduire, *sans chercher à calculer la loi de* Y, l'espérance de Y.

   d. Quelle valeur faut-il donner à r pour que les candidats ignares aient en moyenne $5/20$?

   e. Pour cette valeur de r, déterminer la loi de Y.

2. Une urne contient une proportion p de boules blanches, les autres étant noires. Ces boules sont indiscernables au toucher.
   On effectue une succession de tirages avec remise, et on note S_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la $k^{è}$ boule blanche.
   On pose $S_0 = 0$ et on définit $T_k = S_k - S_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   a. Déterminer la loi de T_k , son espérance, sa variance.

   b. Justifier que les T_k sont indépendantes.

   c. Calculer l'espérance, la variance, la fonction génératrice de S_k .

   d. Déduire la loi de S_k de sa fonction génératrice.

   e. Retrouver cette loi par un raisonnement direct.

3. La **fonction caractéristique** d'une VAED X est $\Phi_X : t \mapsto E\left(e^{itX}\right)$.

   a. Montrer que Φ_X est définie sur $\mathbb{R}$, continue, 2π-périodique.

   b. Calculer $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\Phi_X(t)dt$. En déduire que la loi de X est caractérisée par Φ_X .

   c. Montrer que si X admet une espérance, alors Φ_X est C^1 ; et exprimer $E(X)$ à l'aide de Φ_X .

   d. Montrer que si X admet une variance, alors Φ_X est C^2 ; et exprimer $V(X)$ à l'aide de Φ_X .

   e. Calculer la fonction caractéristique d'une loi géométrique, puis d'une loi de Poisson.