

# $\psi^*$ 2016 : TD des 6 et 8 mars (semaine 21)

## Probabilités

- Deux joueurs  $A$  et  $B$  jouent aux dés avec 2 dés honnêtes indiscernables.  $A$  gagne dès qu'il obtient une somme de 6,  $B$  gagne dès qu'il obtient une somme de 7.  $A$  lance en premier, ensuite ils lancent alternativement.
  - Calculer la probabilité que la partie ne s'arrête pas.
  - Calculer la probabilité que  $A$  gagne.
  - Calculer la probabilité que  $B$  gagne.
- On lance 2 dés identiques mais pas équilibrés : la probabilité que chacun donne  $k$  est  $p_k$ . Est-il possible de choisir les  $p_k$  de telle sorte que la somme des points obtenus suive une loi uniforme ?  
Méthode : on traduira la contrainte d'équiprobabilité à l'aide du polynôme  $Q = \sum_{k=1}^6 p_k X^k$ .
- Le lièvre et la tortue.  
La tortue défie le lièvre avec la règle suivante : le lièvre lance 2 dés, s'il obtient une somme de 12 il avance de 25 cases, sinon la tortue avance d'une case et le lièvre rejoue.
  - Quelle est la probabilité que le lièvre ne décolle jamais ?
  - Quelle est la probabilité que le lièvre n'arrive jamais à 50 ?
  - Si on met l'arrivée à 50, quelle est la probabilité que le lièvre gagne ?
  - A quelle case faut-il mettre l'arrivée pour que le jeu soit le plus équilibré possible ?
  - S'il n'y a pas d'arrivée, quelle est la distance moyenne parcourue par la tortue ?
- Une puce se déplace sur le tableau ci-dessous :

a	b
c	<b>d</b>

La case  $d$  est enduite de colle. A l'instant 0 la puce est en  $a$ , ensuite à chaque instant elle saute de manière équiprobable sur une des 2 cases adjacentes, sauf quand elle atterrit en  $d$  où elle reste collée.

On note  $a_n, b_n, c_n, d_n$  les probabilités que la puce soit sur la case correspondante à l'instant  $n$ .

- Etablir les relations de récurrence reliant les suites  $a, b, c, d$ .
- Calculer  $a_n$ , puis  $b_n, c_n, d_n$ .
- Calculer la probabilité que la puce n'arrive jamais en case  $d$ .
- Calculer le temps moyen mis par la puce pour arriver en  $d$ .
- Refaire les calculs avec le protocole suivant : à chaque instant la puce reste en place ou saute sur une des 2 cases adjacentes, de manière équiprobable.