# $\psi^*$ 2016 : TD des 13 et 15 février (semaine 20)

**Endomorphismes et matrices symétriques**

1. Soit $A \in S_n$ .
   a. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[ \Leftrightarrow \left[\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X^T A X \geq 0\right]$ .
   b. Donner une caractérisation analogue pour $\text{Sp}(A) \subset ]0, +\infty[$ .
   c. Montrer que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ , $\text{Sp}(M^T M) \subset [0, +\infty[$ ; à quelle condition a-t-on $\text{Sp}(M^T M) \subset ]0, +\infty[$ ?

2. Suite de l'exercice 3 du TD précédent.
   Calculer $d(A, O_n)$ dans le cas où $A \in S_n$ .

3. Soient $u, v$ deux endomorphismes symétriques de $E$ euclidien, tels que $uv = vu$ .
   Montrer qu'il existe un base orthonormée qui diagonalise simultanément $u$ et $v$.

4. On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ symétriques ayant toutes leurs valeurs propres positives.
   Soit $\alpha \geq 0$ ; trouver tous les $s \in S^+(E)$ tels que $s^2 = \alpha\, id$ .

5. Soit $u \in S^+(E)$ .
   a. Montrer qu'il existe $v \in S^+(E)$ tel que $u = v^2$ .
   b. Montrer qu'un tel $v$ est unique.
   Indication : un tel $v$ doit commuter avec $u$ .

6. On note $S_n^+$ (resp. $S_n^{++}$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. défini-positives), dans un sens que l'on précisera.
   Soient $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^+$ .
   a. Montrer l'existence et l'unicité de $S \in S_n^{++}$ telle que $A = S^2$ .
   b. Montrer que $C = SBS \in S_n^+$ .
   c. En déduire que $AB$ et $BA$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$, et que leurs valeurs propres sont positives.

7. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ .
   Montrer l'existence et l'unicité de $(S, R) \in S_n^{++} \times O(n)$ tel que $A = RS$ .