ψ^* 2016 : TD des 6 et 8 février (semaine 19)

Espaces euclidiens, isométries

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer :
$$\exists!(Q,R) \in O(n) \times T_n^{++},\ A = QR$$

2. Soit E euclidien et $u \in O(E)$.
Montrer que u est diagonalisable ssi $u^2 = id$. Quelle est alors la nature géométrique de u ?

3. $E = M_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel et de la norme euclidienne qui en résulte.
On fixe $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où chaque λ_i est positif.
   a. Montrer que :
$$\forall Q \in O_n\ ,\ \begin{cases} d(D,Q)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\,(Q \mid D) + n \\ (Q \mid D) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \end{cases}$$
   b. En déduire que $d(D, O_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1)^2}$.

4. Soient E euclidien, F sev de E, $B = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ base ON de E adaptée à F, s la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.
   a. Exprimer s à l'aide de id et p_F (projecteur orthogonal sur F).
   b. Montrer que s est une isométrie ; est-elle directe ?
   c. Pour tout $x \in E$, donner la décomposition de $s(x)$ dans B.
   d. Dans cette question H est un hyperplan. Exprimer $s(x)$ à l'aide de x et e_n .

5. Montrer que les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont de module 1.

6. Que peut-on dire des valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle ?