ψ^* 2016 : TD des 16 et 18 janvier (semaine 16)

Intégration généralisée

1. $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt$
   a. Justifier son existence.
   b. La calculer par développement en série.
   c. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer $c_n = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} e^t dt$ (ce sont les coefficients de Fourier de $\exp$).
   d. On admet le théorème de Parseval : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (e^t)^2 \, dt$.
   En déduire la valeur de A.

2. $G : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^x + 1} dt$
   a. Domaine de définition.
   b. Calculer $G(x)$ comme somme d'une famille indexée par $\mathbb{Z}$.

3. $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt$.
   a. Justifier son existence.
   b. Montrer que $A = \lim u$ où $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \tfrac{t}{n}\right)^n \ln t \, dt$.
   c. Calculer u_n en faisant diverses manipulations (le résultat fait intervenir une somme).
   d. En déduire la valeur de A.

Intégrales à paramètre

1. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{e^t + 1} dt$
   a. Domaine de définition.
   b. A l'aide d'une intégration par parties, trouver $\lim_{+\infty} F$.
   c. Montrer que F est C^∞.

2. Transformée de Fourier.
   a. Montrer que $\Phi : f \mapsto \widehat{f}$ définie par :
   $$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt$$
   est une application linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C^0(\mathbb{R})$.
   b. On prend $f : t \mapsto \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$.
   Montrer que $\widehat{f}$ est C^1, calculer sa dérivée, en déduire son expression, conclure.