

ψ^* 2016 : TD des 5 et 7 décembre (semaine 12)

Suites et séries de fonctions

1. Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{cases}$$

Méthode :

- Après avoir calculé la limite simple f , il faut calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ en étudiant la fonction différence.
- Comme le signe de $f'_n(x) - f'(x)$ n'est pas évident, il faut factoriser l'exponentielle et dériver ce qui reste pour obtenir son signe.
- Au final on doit obtenir $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n} \alpha_n e^{-\alpha_n}$ où on ne connaît pas α_n , mais on peut conclure quand même !

2. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t^2)^n dt$$

En utilisant le théorème d'interversion des limites, en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

3. On pose $I = \int_0^1 x \ln x \ln(1-x) dx$.

- a. Montrer que $F : x \mapsto x \ln x \ln(1-x)$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$. Ceci assure l'existence de I .
- b. Utiliser le DSE de \ln pour construire une série de fonctions uniformément convergente vers F sur $[0, 1]$.
- c. Calculer I à l'aide de cette série.

4. Etude complète de $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$ (domaine de définition, limites, dérivabilité, variations).

5. Montrer que $G : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} x^n$ est continue sur I à préciser, et C^∞ sur l'intérieur de I . Est-elle dérivable en -1 ?