ψ^* 2016 : TD des 10 et 12 octobre (semaine 6)

Dérivation

1. Mouvement à accélération centrale.
Soit $F \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ telle qu'à chaque instant le vecteur accélération de $M = f(t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.
a. Montrer que $g : t \mapsto \frac{1}{2} F(t) \wedge F'(t)$ est constante.
Dans la suite on suppose cette constante non nulle.
b. Montrer qu'il existe un plan contenant la trajectoire (première loi de Kepler).
c. Interpréter géométriquement $a(t,h) = \frac{1}{2} \|F(t) \wedge F(t+h)\|$ pour h positif et petit.
d. La **vitesse aréolaire** est $\alpha : t \mapsto \lim_{h \to 0^+} \dfrac{a(t,h)}{h}$.
Montrer qu'elle est constante (deuxième loi de Kepler).
NB : la troisième loi de Kepler n'est vraie que si l'accélération est proportionnelle à $\frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|^2}$.

2. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Montrer que :
a. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists H_n \in \mathbb{R}[X],\ D^n f : x \mapsto H_n(x)\, e^{-x^2}$.
b. Chaque H_n est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et simple.

3. Erreur d'interpolation de Lagrange.
Soient I un segment de $\mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$, $a_0 ... a_n$ des points distincts de I, P le polynôme de degré $\leq n$ qui coïncide avec f aux points a_i .
a. On fixe $x \in I$ distinct des a_i. Montrer qu'on peut choisir k tel que:
$$\varphi : t \mapsto f(t) - P(t) - k \prod_{i=0}^{n} (t - a_i)$$
s'annule en x, et appliquer alors Rolle à φ et ses dérivées autant de fois que possible.
b. En déduire que $\left\| f - \widetilde{P} \right\|_\infty \leq M \frac{\|D^{n+1} f\|_\infty}{(n+1)!}$ avec M indépendant de f, à exprimer à l'aide de $Q = \prod_{i=0}^{n} (X - a_i)$.

4. Soit E un espace euclidien : muni d'un produit scalaire et de la norme euclidienne associée.
Soit $F \in C^2([0,b], E)$ tel que F' ne s'annule pas.
a. Montrer que $\varphi : t \mapsto v = \|F'(t)\|$ est C^1 et calculer sa dérivée.
b. Montrer que $\psi : t \mapsto s = \int_0^t \varphi$ est un C^2-difféomorphisme de $I = [0,b]$ sur un intervalle J à déterminer.
c. Montrer que $G = F \circ \psi^{-1}$ est C^2 et que F et G ont même trajectoire, ie $F(I) = G(J)$.
d. Calculer $\overrightarrow{T} = G'(s)$ et l'interpréter géométriquement.
Vérifier que pour la loi G, la trajectoire est décrite à vitesse constante.
e. Montrer que pour la loi F, la composante tangentielle du vecteur accélération en M est :
$$\overrightarrow{a_T} = \frac{dv}{dt} \overrightarrow{T}$$
f. Calculer $G''(s)$ et montrer que :
$$G''(s) = \frac{1}{v^2} \overrightarrow{a_N} \quad \text{où} \quad \begin{cases} v \text{ est la vitesse instantanée en } M = F(t) \text{ pour la loi } F \\ \overrightarrow{a_N} \text{ est le vecteur accélération normale en } M \text{ pour la loi } F \end{cases}$$