# $\psi^*$ 2016 : TD des 3 et 5 octobre (semaine 5)

## Continuité

1. On fixe un entier naturel $p$ ; justifier la continuité de :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{k}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{k}) \\ A & \mapsto & A^p \end{array} \right.$$
On pourra commencer par le cas $p = 2$ .

2. Déterminer si les parties suivantes de $E = M_n(\mathbb{R})$ sont ouvertes, fermées, ou ni l'un ni l'autre. On pourra admettre que toute intersection de fermés est fermée, et que toute union finie de fermés est fermée.
   a. $U =_{déf} \{$ matrices de déterminant 1 $\}$
   b. $S =_{déf} \{$ matrices symétriques $\}$
   c. $V =_{déf} \left\{ A \in E \mid \forall k \in [1..n] \right.$ , $\left. \mathrm{tr}(A^k) > 0 \right\}$
   d. $N = \{$ matrices nilpotentes $\}$
   e. $S^+ =_{déf} \{ A \in S \mid \forall X \in \mathbb{R}^n,\ {}^tXAX \geq 0 \}$

3. Soient $E$ et $F$ deux ev de dimension finie, $f : E \rightarrow F$ définie sur $E$.
Montrer de 2 manières que si $f$ est continue, alors son graphe est fermé.

4. Soient $E$ un ev de dimension finie, $A$ une partie fermée non vide de $E$, $b$ un point de $E$ .
On définit $d(b, A) = \inf \{ d(b, x) \mid x \in A \}$ .
Montrer que cet $\inf$ existe, puis que c'est en fait un $\min$ .

5. Soit $A$ une partie bornée, fermée, non vide d'un ev $E$ de dimension finie, et $f$ une application de $A$ dans $A$ vérifiant :
$$\forall (x, y) \in A^2,\ x \neq y \ \Rightarrow\ d\left(f(x), f(y)\right) < d(x, y)$$
   a. En utilisant $g : x \mapsto d\left(x, f(x)\right)$ , montrer que $f$ a au moins un point fixe.
   b. Montrer que le point fixe de $f$ est unique.