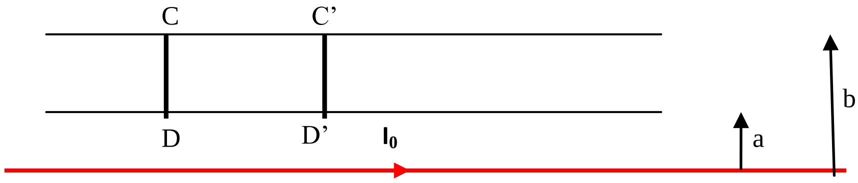
TD Physique N°7 – Induction - ARQS

EXERCICE 1 : Deux rails conducteurs

Sur deux rails conducteurs on place deux barreaux CD et C'D' :



C'D' possède une vitesse constante v_0.
On note R la résistance d'un barreau et on néglige la résistance due aux rails par rapport à R.
Le fil situé à a du rail inférieur et à b du rail supérieur est parcouru par un courant I_0.
Etudier la vitesse v(t) du barreau CD (à t = 0, v(0) = 0).

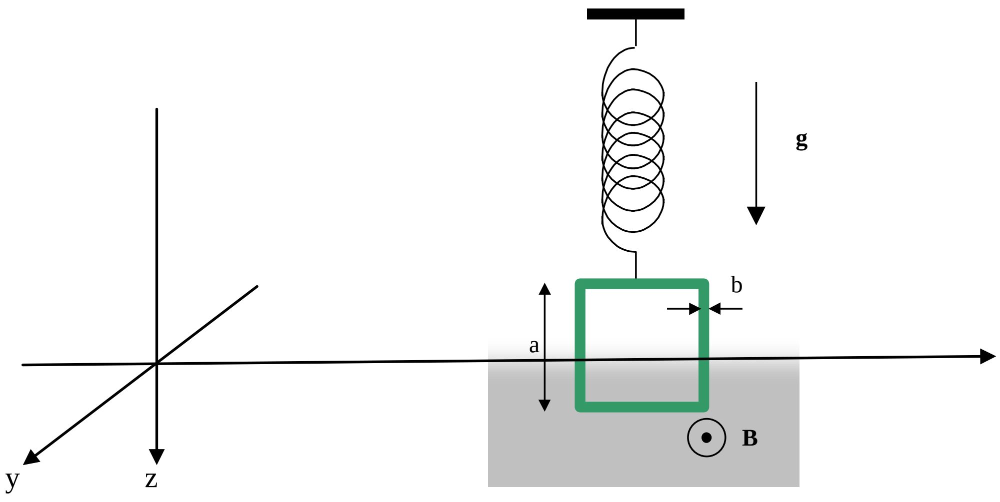
EXERCICE 2 : Oscillations amorties

- Un cadre carré de côté a, de masse m, de résistance R et d'inductance négligeable, est suspendu à un ressort de raideur k. Il peut se déplacer selon un mouvement de translation verticale.
- Dans la zone centrale de l'entrefer d'un aimant en U, le champ magnétique, orthogonal au cadre, est uniforme : $\mathbf{B} = B_0\mathbf{e_y}$.

Au repos, le cadre pénètre partiellement dans cette zone centrale et sort partiellement du champ (ainsi, la partie inférieure du cadre se trouve dans le champ tandis que la partie supérieure se trouve en dehors du champ).

On néglige tous les frottements mécaniques.

L'axe z est dirigé vers le bas et la côte z = 0 correspond à la limite du champ **B :**



1) On veut étudier les petits mouvements du cadre. On suppose que la partie supérieure du cadre reste constamment en dehors du champ. Déterminer l'équation d'évolution de z(t), altitude du côté inférieur du cadre.

2) Le cadre de côté a = 4 cm est découpé dans une plaque de cuivre d'épaisseur e = 10 mm et largeur b = 4mm.
La raideur du ressort est $k = 2{,}0\ N.m^{-1}$. Le champ magnétique est : B = 0,1 T.
Pour le cuivre : $\gamma = 5{,}9.10^7\ S.m^{-1}$; $\rho = 9{,}0.10^3\ kg.m^{-3}$.
Calculer le temps caractéristique d'amortissement et la période des oscillations.

EXERCICE N°3 : Effet de peau dans une plaquette (E3a – Extrait)

Un milieu conducteur de conductivité $\sigma = 6.10^6\ S.m^{-1}$ s'étend dans le demi-espace $z > 0$.
À l'extérieur du conducteur, règne un champ magnétique variable $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_y$, comme le montre la figure 2.

Données numériques : *vitesse de la lumière dans le vide* $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$,
perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$,
permittivité absolue du vide $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0 c^2}$.

A–1 Propriétés des champs dans le conducteur

A1*a. Montrer que dans le conducteur, toute charge volumique ρ décroît exponentiellement vers zéro, en fonction du temps. Évaluer numériquement le temps caractéristique de cette évolution.

A1*b. Justifier que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction si la fréquence du champ utilisée est inférieure au MHz.

Dans la suite du problème, il conviendra de prendre $\rho = 0$ dans le conducteur et de négliger le terme en $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

A1*c. Ecrire les équations de Maxwell dans le milieu conducteur avec ces hypothèses, en faisant uniquement apparaître la densité de courant $\vec{j}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.

En notation complexe, une solution de ces équations pour $\vec{B}$ peut s'écrire sous la forme :
$$\underline{\vec{B}}(z,t) = b_0 \exp\left[i\left(\omega t - \underline{k}z\right)\right]\vec{u}_y \text{ , où } \underline{k} \text{ peut être complexe.}$$

A1*d. Déterminer la forme que doit alors prendre la densité de courant $\underline{\vec{j}}(z,t)$ en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère.

A1*e. Etablir, grâce à l'équation de Maxwell-Faraday, la relation suivante : $\underline{k}^2 = -i\,\mu_0\sigma\omega$.

A–2 Cas du conducteur infini

Le conducteur occupe tout le demi-espace $z > 0$ (figure 2).

A2*a. Montrer que, nécessairement, $\underline{k} = (1-i)\sqrt{\dfrac{\mu_0\sigma\omega}{2}}$.

A2*b. En écrivant les conditions de passage en $z = 0$, vérifier que $b_0 = B_0$.

A2*c. Etablir les expressions réelles de $\underline{\vec{B}}(z,t)$ et de $\underline{\vec{j}}(z,t)$, en posant $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$.

A2*d. Donner une interprétation physique de δ.

A2*e. Calculer δ pour le conducteur considéré, pour les fréquences $f_1 = 100\ \text{Hz}$ et $f_2 = 125\ \text{kHz}$.

A2*f. Déterminer la puissance volumique P_v cédée par le champ électromagnétique au conducteur ; préciser sa valeur moyenne.

A2*g. Exprimer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ cédée par le champ électromagnétique au conducteur dans tout le volume d'un cylindre d'axe parallèle à Oz, de longueur infinie et de section S, découpé dans le conducteur.

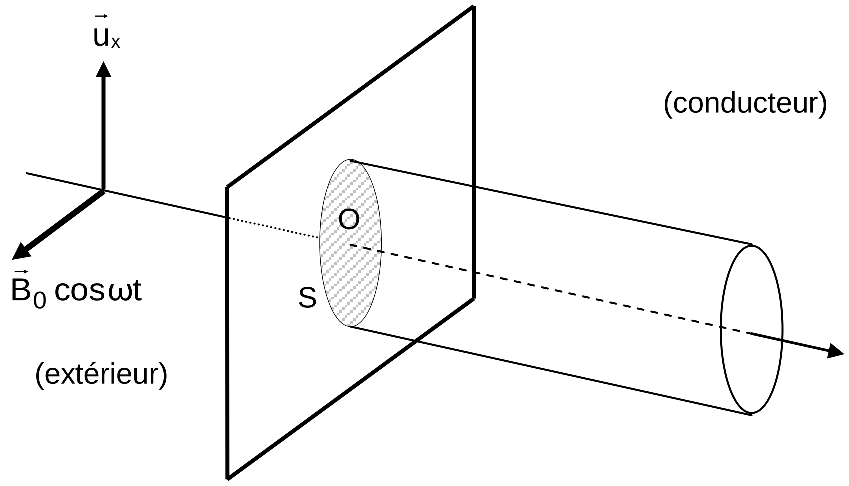


Figure 2

A2*h. En déduire la puissance thermique Φ_0 reçue par le conducteur par unité de surface extérieure.

A2*i. Calculer Φ_0 pour la fréquence $f_2 = 125\ \text{kHz}$ et pour un champ magnétique extérieur d'amplitude $B_0 = 0{,}5\ \text{T}$.

A–3 Courant surfacique équivalent (conducteur semi-infini)

A3*a. Quel est le courant élémentaire $d\underline{I}$ qui traverse un rectangle élémentaire (voir figure 3), parallèle au plan yOz, de côtés dy et dz, orienté selon $\vec{u}_x$? *(utiliser la notation complexe)*

A3*b. Montrer que le courant total $\underline{I}$ qui traverse un ruban de largeur $\Delta y = \ell$ et s'étendant sur toute la profondeur du conducteur peut s'écrire sous la forme : $\underline{I} = \dfrac{\ell\, B_0}{\mu_0}\, e^{i\omega t}$.

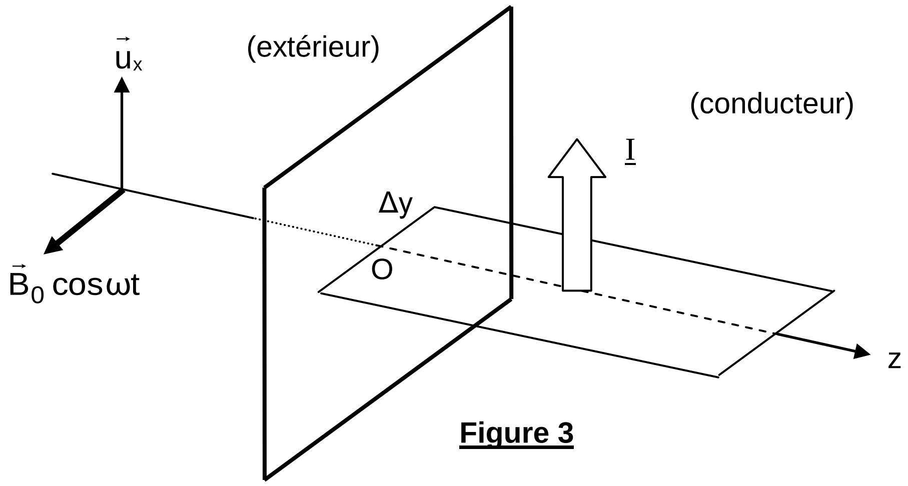


Figure 3

À la limite où la zone de conducteur perméable au champ est d'épaisseur nulle, considérons que ce conducteur est parcouru en surface par un courant $\underline{\vec{j}}_s = \underline{j}_{s0}\, e^{i\omega t}\, \vec{u}_x$ et que le champ est nul en tout point intérieur au conducteur.

A3*c. A partir de l'expression de δ dire à quelle hypothèse cela correspond pour σ.

A3*d. Quelle valeur doit être affectée à $\underline{j}_{s0}$ pour obtenir le courant $\underline{I}$ du A3*b ?

A3*e. Retrouver cette valeur en utilisant les relations de passage.