

EXERCICE 1 : Ecoulement d'un glacier – E3A PSI 2013

PREMIERE PARTIE

ECOULEMENT D'UN GLACIER

Un glacier est une masse de glace qui se forme par le tassement de couches de neige accumulées ; écrasée sous son propre poids, la neige expulse l'air qu'elle contient, se soude en une masse compacte et se transforme en glace.

Du fait de sa plasticité, un glacier s'écoule lentement sous l'effet de la gravité le long d'une pente avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. Sa vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groenland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an.

A / ETUDE PRELIMINAIRE (ECOULEMENT D'UNE COUCHE DE MIEL)

En préambule à l'étude d'un glacier, intéressons nous à l'écoulement d'un fluide visqueux, par exemple une couche de miel, sur une plaque plane inclinée.

Une couche d'épaisseur constante  $h$ , d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ , s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport  $\nu = \eta / \rho$ .

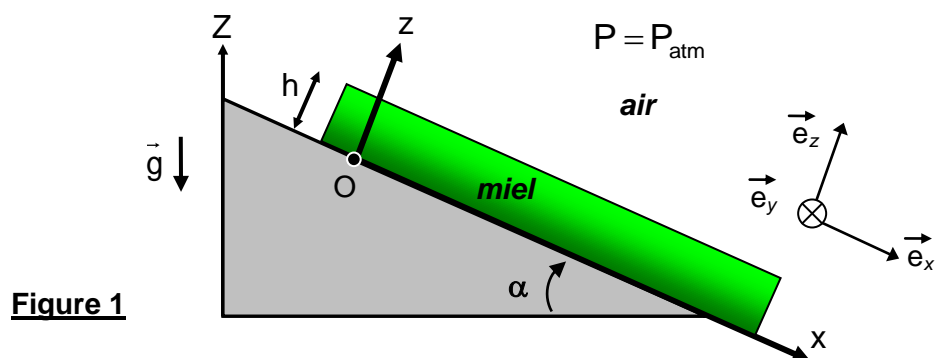


Figure 1

Le support plan incliné a pour équation  $z = 0$  et la surface libre correspond à  $z = h$ . Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air-miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions  $Ox$  et  $Oy$  sont très supérieures à l'épaisseur  $h$  de la couche de miel.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent.

- A1.** Préciser l'orientation des lignes de courant dans la couche de miel.
- A2.** Montrer qu'en écoulement stationnaire unidirectionnel, le champ de vitesses s'écrit sous la forme :  $\vec{v}(M) = v(z) \vec{e}_x$ .
- A3.** Dans les conditions qui viennent d'être décrites, simplifier l'équation générale de NAVIER-STOKES :  $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overline{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \eta \overline{\Delta v}$ . (*D désigne la dérivée particulaire*)
- A4.** Projeter l'équation locale de la dynamique qui en résulte sur la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .  
En déduire les expressions des composantes du vecteur  $\overline{\text{grad}} P$  sur cette base.
- A5.** Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit  $P = P(z)$ , puis l'exprimer.
- A6.** Etablir l'équation différentielle  $\frac{d^2v(z)}{dz^2} + k \sin \alpha = 0$  vérifiée par la vitesse  $v(z)$  et identifier  $k$ .
- A la surface libre, sur le plan d'équation  $z = h$ , la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle.*
- A7.** Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse  $v$ , en  $z = 0$  et à sa dérivée  $\frac{dv(z)}{dz}$ , en  $z = h$ .
- A8.** Résoudre l'équation différentielle et montrer que le profil de vitesse dans la couche de miel vérifie la relation :  $v(z) = \beta z(2h - z)$ . Identifier  $\beta$ .  
Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse  $v_{\text{MAX}}$ . Calculer  $v_{\text{MAX}}$  sachant que  $h = 3,0 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ,  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et que, pour le miel,  $\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\eta = 10,0 \text{ Pa.s}$ .
- A9.** Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).
- La couche de miel possède une largeur  $W$  (selon  $Oy$ ) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur  $h$ .*
- A10.** Exprimer le débit volumique  $Q_v$  du miel. En déduire la vitesse moyenne  $\langle v \rangle$  de l'écoulement et l'exprimer en fonction de  $v_{\text{MAX}}$ .
- A11.** Exprimer le nombre de REYNOLDS, écrit comme le rapport de deux termes énergétiques qu'il conviendra de justifier. En déduire son expression littérale puis sa valeur numérique. Qualifier la nature de l'écoulement.

## B / DYNAMIQUE D'UN GLACIER

Les mouvements d'un glacier peuvent être modélisés par l'écoulement d'un fluide newtonien extrêmement visqueux. Afin d'adopter une géométrie simple, la vallée glaciaire est assimilée à une canalisation de section rectangulaire en forme de U dont le fond est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (Figure 2). La masse de glace occupant cette vallée possède une largeur moyenne  $a$  et une épaisseur moyenne  $h$ , avec  $a = 2h$ .

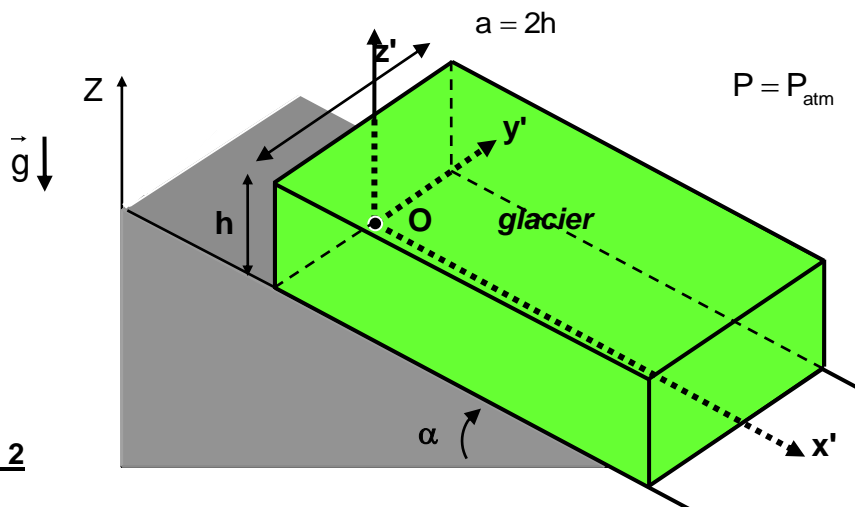
Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches du glacier s'écrit :  $\vec{v}(M) = v(y, z) \vec{e}_x$ .

**B1.** Etablir, à partir des résultats obtenus dans l'étude préliminaire, l'équation différentielle décrivant l'écoulement du glacier en régime permanent.

Afin de simplifier la description de cet écoulement, réalisons les changements de variables suivants :  $y = y' a$ ,  $z = z' a$ . Les grandeurs  $y'$  et  $z'$  sont adimensionnées.

**B2.** Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique  $v_0$ , et en posant  $v = v' v_0$ , de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en  $v'(y', z')$ , pouvant s'écrire :  $\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$ .

Expliciter  $v_0$ .



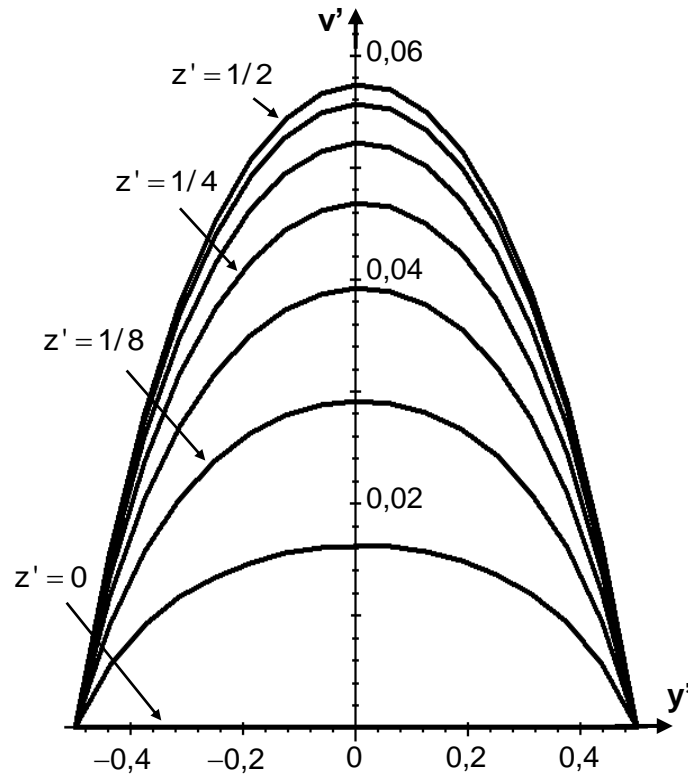
**Figure 2**

**B3.** Préciser les conditions aux limites vérifiées par la solution  $v'(y', z')$ , en  $z' = 0$  et  $y' = \pm 1/2$ , puis par sa dérivée  $\frac{dv'}{dz'}$ , en  $z' = 1/2$ .

La résolution informatique de cette équation différentielle permet d'obtenir le tracé de  $v'$  en fonction de  $y'$  (Figure 3) pour différentes valeurs du paramètre  $z'$  (compris entre 0 et 1/2).

**B4.** Evaluer la valeur maximale  $v'_{MAX}$  atteinte par la vitesse adimensionnée  $v'$  à la surface supérieure du glacier.

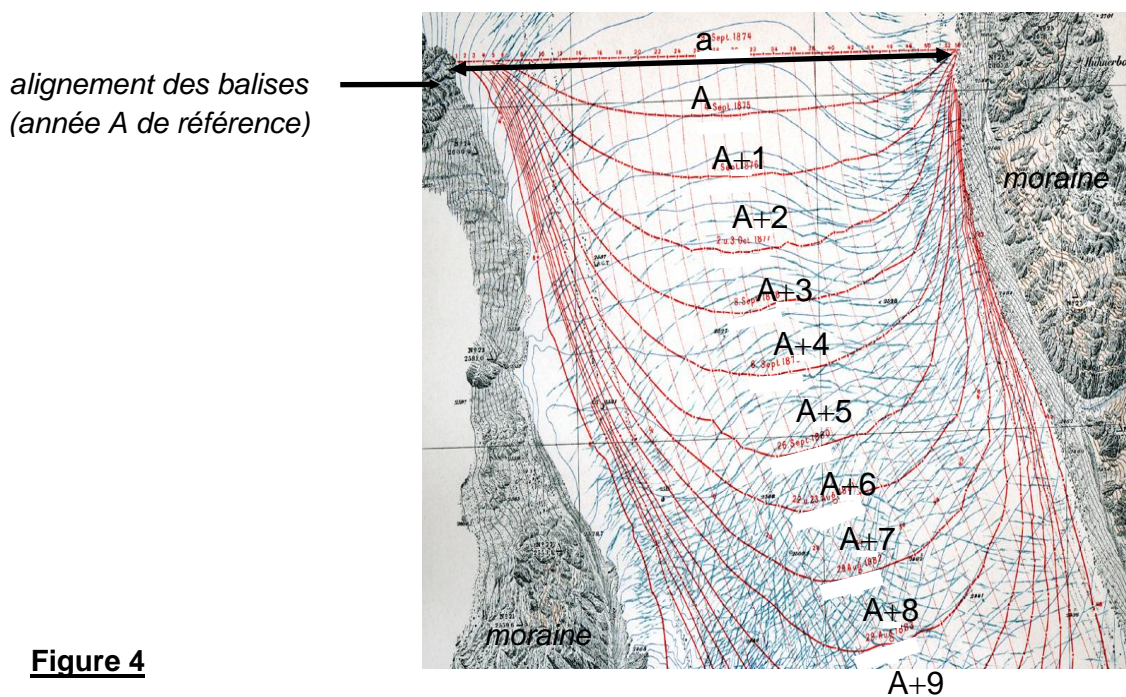
**B5.** Combiner ce tracé avec celui réalisé en question A9, dans le plan  $Oxz$  afin de représenter, en vue perspective, l'écoulement du glacier en trois dimensions.



**Figure 3**

Etablie pour le glacier du Rhône près du col de la Furka dans le Valais suisse, la figure 4 présente, en superposition à une carte IGN, l'évolution d'une ligne d'environ 50 balises au cours d'une décennie (années référencées A, A+1, ... , A+9). A l'instant de référence (année A), les balises sont alignées sur la largeur a du glacier, entre deux moraines latérales.

- B6.** Estimer le déplacement de la balise centrale sur la durée de 9 années. Calculer la vitesse moyenne de déplacement en  $m.an^{-1}$ , puis en  $m.s^{-1}$ .  
En déduire la valeur de la vitesse caractéristique  $v_0$ .
- B7.** Déterminer, puis calculer, la viscosité cinématique de la glace. Commenter.



**Figure 4**

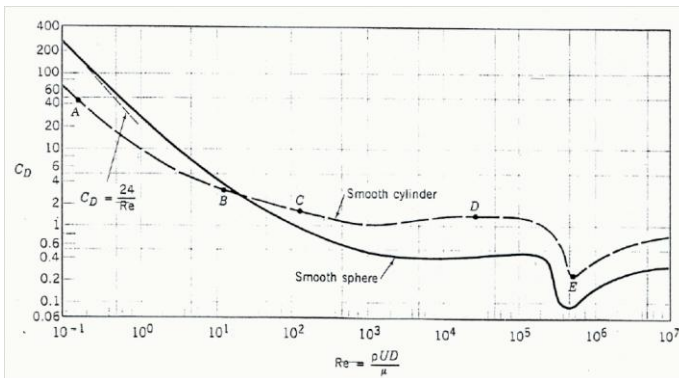
Écoulement du glacier du Rhône

Données :  $a = 2h = 800 \text{ m}$ , angle moyen  $\alpha = 14^\circ$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

## EXERCICE 2 : Résolution de problème

Données :

- Viscosité cinématique de l'air :  $\nu = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Courbes  $C_x(R_e)$  :



- Un cycliste amateur bien entraîné est capable de rouler sur le plat à une vitesse moyenne de 40 km/h.
- La puissance de frottement des roues et des pièces mécaniques correspond à 10 % environ de la puissance totale dépensée par le cycliste.
- Le cycliste a une masse de 80 kg (y compris son vélo et son équipement qui représentent 10 kg environ).
- La montée de l'Alpe d'Huez depuis le Bourg d'Oisans est longue de 14.5 km et correspond à un dénivelé positif de 1120 m.

Le record de cette montée, 37.5 minutes, appartient à Marco Pantani, 60 kg lors d'une étape du tour de France 1997.

Déterminer le temps mis par le cycliste amateur pour réaliser la montée. Comparer au temps mis par Marco Pantani. A partir de votre résultat, évaluer la puissance développée par Marco Pantani. En réalité, sa puissance disponible était d'environ 420 W; d'où vient la différence éventuelle ?