PSI* 2016 – 2017
TD N°10
CORDE VIBRANTE

EXERCICE 1 : Relations de passage pour une corde composée

On considère une corde composée le long d'un axe Ox : l'une de deux parties située entre - ∞ et 0 a une masse linéique μ_1 et l'autre située entre 0 et + ∞ est de masse linéique μ_2 avec $\mu_2 \neq \mu_1$.
Elles sont tendues par la même tension T.

On considère une onde incidente progressive venant du milieu 1 et se dirigeant dans le sens des x croissants, dont on donne la représentation complexe :

$$\underline{z}_i(x,t) = \underline{A}_i \exp(j\omega[t - x/C_1])$$

On veut déterminer les ondes réfléchie et transmise à la séparation des deux milieux.
Les célérités y seront C_1 et C_2.

1) Donner la représentation complexe des ondes transmise et réfléchie. On prendra $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$ comme amplitudes respectives de ces deux ondes en complexe. A quelle condition sont-elles de même pulsation que le signal incident ?

2) Donner les conditions de passage à la frontière des deux milieux en indiquant au préalable quelles grandeurs sont continues et pourquoi.

3) Déterminer les amplitudes $\underline{A}_t$ et $\underline{A}_r$. Définir et donner l'expression des coefficients de transmission et de réflexion en fonction des deux masses volumiques, μ_1 et μ_2.
Étudier trois cas particuliers liés à des valeurs remarquables ou limites de μ_2.

4) On considère $\underline{A}_i$ = A. Exprimer les ondes réelles associées respectivement au milieu 1 et au milieu 2.
a) Donner z(x,t) pour les deux parties de la corde sous forme d'une somme d'un terme progressif et d'un terme stationnaire (l'un des termes peut éventuellement être nul).

b) On donne les expressions de l'énergie linéique de la corde et du flux d'énergie :

$$e = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \text{ et } \Phi = -T\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

D'autre part on admet la relation (l'on pourra montrer à titre d'exercice) :

$$\left(\frac{\partial e}{\partial t}\right) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right).$$

- Commenter l'expression de e et la relation liant e et Φ.

- L'énergie mécanique est-elle continue au passage en O ? Donner l'expression du flux d'énergie qui s'écoule le long de la corde pour l'onde incidente, l'onde réfléchie et pour l'onde transmise : Φ_i, Φ_r et Φ_t. Vérifier la conservation de l'énergie lors du passage en O.

EXERCICE 2 : Membranes vibrantes

Données :

a) Le problème fait appel à l'équation différentielle dite de « Bessel » :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0 \text{ avec } m \text{ entier}$$

Les solutions de cette équation sont:

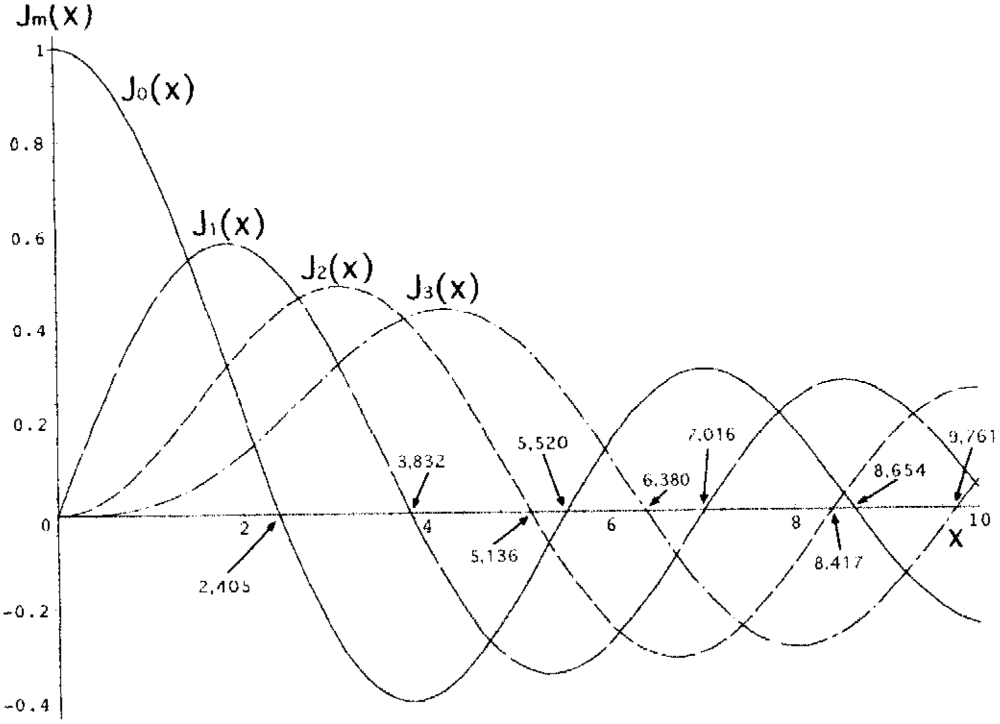
$$y(x)=C_1\,J_m(x)+C_2\,Y_m(x)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, J_m la fonction de Bessel de première espèce d'indice entier m, Y_m la fonction de Bessel de seconde espèce d'indice entier m.

Les formes asymptotiques de ces fonctions de Bessel sont, pour x « 1 :

$$J_m(x)\to\frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m\ ;\ Y_0(x)\to\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+0{,}5772...\right),\ Y_m(x)\to-\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^m \text{ pour m = 1, 2, 3....}$$

La figure ci-dessous donne les graphes des fonctions de Bessel d'indice entier J_0, J_1, J_2, J_3 pour x variant de 0 à 10.



b) Chaque fonction de Bessel possède des zéros, que l'on numérote : 1, 2, 3... sachant que le zéro x = 0 est exclu. Ainsi, le premier zéro numéroté de J_1 est pour x = 3,832.

c) On donne l'expression du laplacien scalaire dans les systèmes de coordonnées suivants :

Coordonnées cartésiennes (x, y, z) : $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques (r, θ, z) (Cf. figure I.2): $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

On s'intéresse dans cette partie aux vibrations de membranes élastiques tendues, sans raideur.

<u>Définition</u>: On définit la tension d'une membrane par analogie avec celle d'une corde. Si on pratique une fente rectiligne de longueur dl dans la membrane tendue, il faut exercer sur les

deux bords pour les maintenir en place deux forces égales et opposées, contenues dans le plan tangent à la membrane au point d'application, perpendiculaires à la direction de la fente, et de valeur: dF = Tdl.

On montre, comme dans le cas de la corde, que la « tension » T est, pour une membrane donnée, <u>une constante indépendante du point envisagé et de l'orientation de la fente</u>, sous réserve des mêmes hypothèses de non raideur et de petits mouvements.

I.A. membrane rectangulaire

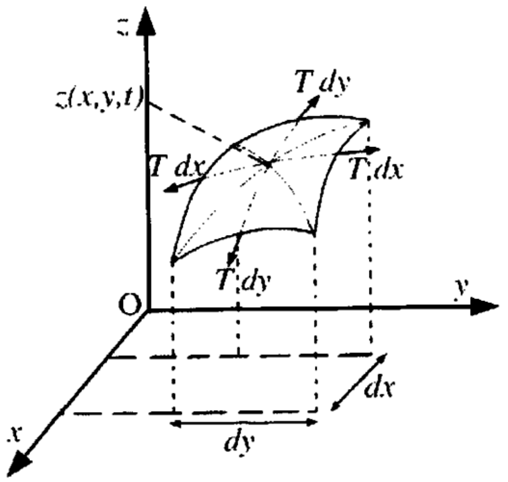


figure I.1

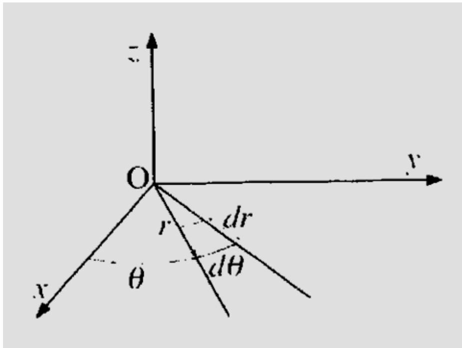


figure I.2

I.A.1. Soit une membrane rectangulaire tendue de dimensions L_x et L_y de masse par unité de surface σ constante. Cette membrane, au repos est située dans le plan xOy (figure I.1). La membrane est soumise à des conditions aux limites que l'on précisera ultérieurement. On étudie les mouvements de la membrane, chaque point ne pouvant se déplacer que selon la direction Oz (vibrations transversales).
Donner la condition qui permet de négliger le poids de la membrane dans l'étude de son mouvement.

I.A.2. On considère un élément infinitésimal de la membrane, de dimensions au repos dx et dy, écarté de sa position d'équilibre d'une quantité z(x, y, t) (figure I.1). Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément.

I.A.3. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique et mettre le résultat sous forme d'une équation d'onde en coordonnées cartésiennes. On précisera la valeur de la célérité c de l'onde en fonction des données et on vérifiera l'homogénéité de l'expression obtenue.

I.A.4. Donner la justification d'un choix de solutions à variables séparées :

$$z(x,y,t) = X(x)Y(y)\Psi(t)$$

Montrer que ce choix impose: $\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{dt^2} = K$ où K est une constante que l'on posera, après justification, égale a $-\omega^2$.

I.A.5. Donner une solution à laquelle satisfait $\Psi(t)$.

I.A.6. Montrer que les fonctions X et Y satisfont à des équations différentielles dont on donnera les solutions générales.

I.A.7. La membrane est fixée rigidement le long de ses quatre bords: (x = 0), ($x = L_x$) (y = 0), ($y = L_y$). Donner la solution $z_{m,n}(x, y, t)$ en fonction de : x, y, L_x, L_y, m, n, t et deux constantes M et N, où m et n sont des entiers, le premier relatif à la solution de X et le second à la solution de Y.

I.A.8. Donner les expressions des fréquences $f_{m,n}$ auxquelles la membrane peut vibrer.

I.A.9. Faire successivement les représentations sur une membrane rectangulaire (L_x représentée par 4 cm, L_y par 2 cm) des <u>lignes nodales</u> pour les six cas suivants :
(m = 1, n = 1) ; (m = 2, n = 1) ; (m = 1, n = 2) ; (m = 2, n = 2) ; (m = 3, n = 1) ; (m = 3, n = 2).

<u>I.B. Membrane circulaire</u>

I.B.1. L'étude de l'élément infinitésimal de la membrane de géométrie circulaire se rapporte à des coordonnées polaires dans le plan xOy (figure I.2). Donner, sans calcul, en transposant les résultats des questions I.A.2. et 3. et des formules fournies, l'équation différentielle régissant le mouvement $z(r, \theta, t)$ d'un élément infinitésimal de membrane.

I.B.2. On cherche une solution à variables séparées sous la forme :

$$z(r, \theta, t) = R(r)\, F(\theta)\, \Psi(t)$$

Montrer que ce choix, que l'on justifiera, conduit à l'équation (1) $\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\theta^2} = K'$, avec K' constante que l'on posera égale à $-m^2$ et à une autre équation différentielle (2), portant sur R, que l'on exprimera.

I.B.3. Résoudre (1) ; montrer que m est nécessairement entier.

I.B.4. Montrer par le changement de variable $r' = \frac{r\omega}{c}$ que l'équation différentielle (2) est une équation différentielle de Bessel. En donner les solutions physiquement acceptables.

I.B.5. On considère un tambour (photos ci-dessous) mis en excitation par un dispositif dont une partie est visible en haut et à gauche de chaque photo.
Une poudre noire est saupoudrée uniformément sur la surface du tambour avant la mise en marche du dispositif vibratoire.

- Commenter les photos.

- On repère par l'indice n le $n^{ième}$ zéro de la solution de R. Indiquer quels sont les couples d'entiers (m, n) qui correspondent aux photos (le $n^{ième}$ zéro étant situé au bord du tambour).