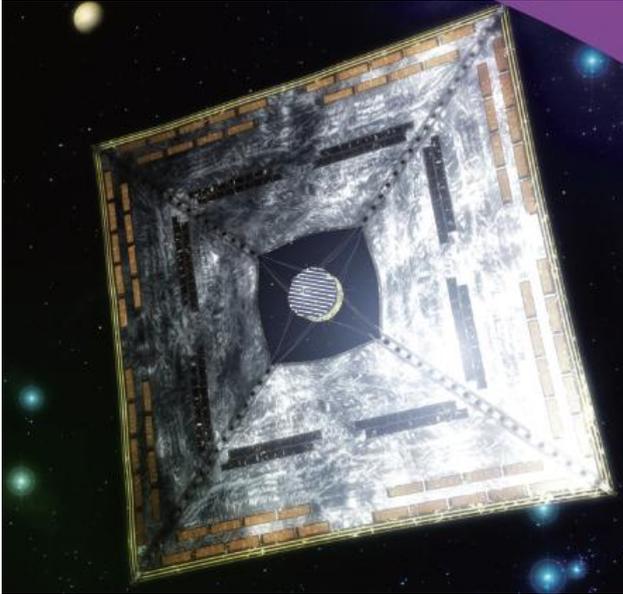


EXERCICE 1 : Voile Solaire

La voile solaire IKAROS (photo ci-dessous) a été déployée dans l'espace en 2010 par l'agence spatiale japonaise. Elle mesure environ 200 m² et est constituée d'une membrane polyimide de 7,5 μm d'épaisseur ; elle est recouverte de cellules solaires de 25 μm d'épaisseur. Elle a montré pour la première fois l'efficacité du système de propulsion à voile solaire en naviguant autour du soleil pendant 6 mois.



C'est la pression de radiation qui permet cette propulsion ; l'exercice se propose de modéliser cette pression et de discuter les caractéristiques de différentes voiles solaires.

On considère un faisceau lumineux de puissance surfacique moyenne P_{surf} et de fréquence ν arrivant en incidence normale sur une plaque parfaitement réfléchissante d'aire S . D'un point de vue corpusculaire, on peut voir ce faisceau comme un ensemble de photons, d'énergie $h\nu$ et de quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$, se déplaçant à la vitesse c . On note n^* la densité volumique de photons dans le faisceau incident.

1) Exprimer l'énergie lumineuse traversant une section droite du faisceau d'aire S pendant dt . En déduire la densité de photons n^* en fonction de P_{surf} , h , ν et c .

2) On étudie dans un premier temps la réflexion d'un unique photon sur la plaque réfléchissante. Exprimer la quantité de mouvement du photon avant et après réflexion. En déduire la force exercée sur le photon par la plaque pendant la durée δt du choc.

3) Exprimer alors la force exercée par l'ensemble du faisceau lumineux sur la plaque et montrer qu'il s'exerce une pression de radiation moyenne $\langle p \rangle$ que l'on exprimera en fonction de P_{surf} et c . Vérifier l'homogénéité du résultat.

On peut retrouver cette pression de radiation à l'aide d'un modèle ondulatoire de la lumière.

4) Etablir l'équation de propagation dans le vide vérifiée par les champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique.

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propageant dans le vide arrive en incidence normale sur la plaque située en $z = 0$ et donne lieu à une onde réfléchie se propageant en sens opposé. Le champ électrique de l'onde incidente défini pour $z < 0$ s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

5) Démontrer la relation de dispersion reliant ω et k .

6) En admettant que le champ électrique est nul à l'intérieur de la plaque (conducteur supposé parfait) et en utilisant la continuité admise de la composante tangentielle du champ

électrique à la traversée de l'interface, donner l'expression du champ électrique \vec{E}_r de l'onde réfléchie.

7) Retrouver la relation de structure liant le champ électrique \vec{E}_i et le champ magnétique \vec{B}_i de l'onde incidente. En déduire l'expression de \vec{B}_i et de \vec{B}_r , les champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie.

8) Déterminer le champ électrique $\vec{E}(z,t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ de l'onde totale régnant dans le vide. Commenter.

On montre que la force exercée par l'onde incidente sur un élément de surface de la plaque s'écrit :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2} \vec{j}_s \wedge \vec{B}(0,t) dS$$

où $\vec{j}_s = \frac{B_y(0,t)}{\mu_0} \vec{e}_x$ est la densité surfacique de courant générée sur la plaque en $z = 0$ par la réflexion de l'onde.

9) Exprimer $d\vec{F}$ et montrer qu'il s'exerce sur la plaque une pression de radiation moyenne $\langle p \rangle$ que l'on exprimera en fonction de ϵ_0 et E_0 .

10) Montrer que $\langle p \rangle$ s'exprime simplement en fonction de la densité volumique d'énergie moyenne $\langle w_i \rangle$ de l'onde incidente.

11) Déterminer la puissance surfacique moyenne de l'onde incidente en fonction de ϵ_0 , c et E_0 . Commenter.

La Terre se situe à la distance $d = 1,5 \cdot 10^{11}$ m du Soleil, définissant ainsi l'unité astronomique (1 UA = $1,5 \cdot 10^{11}$ m). La puissance surfacique moyenne du rayonnement solaire reçu au niveau de la Terre (en haut de l'atmosphère) est donnée par la constante solaire $A_0 = 1,36 \cdot 10^3$ W.m⁻².

12) Evaluer la pression de radiation ressentie au niveau de la Terre. Commenter.

13) Le vaisseau Cosmos-1 lancé en 2005 avait une masse de 110 kg et une voile circulaire de 30 m de diamètre fabriquée en mylar. Le vaisseau Ikaros pèse quant à lui 315 kg avec une voile carrée de 14,1 m de côté en polyimide. Déterminer la force de pression de radiation dans chaque cas et évaluer l'accélération de chaque vaisseau. Commenter.

Les sondes Voyager-1 et Voyager-2, lancées en 1977 par la NASA, sont toujours en fonctionnement et se trouvent actuellement aux limites de notre Système Solaire. Avec une vitesse de 60 000 km/h, Voyager-1 est l'objet le plus rapide jamais construit par l'Homme et, depuis 2013, le premier à être sorti de notre Système Solaire après avoir franchi l'héliopause (frontière qui sépare l'héliosphère, où se trouve notre Système Solaire, de l'espace interstellaire) à 120 UA du Soleil.

On cherche à évaluer les performances d'une voile solaire dans un but d'exploration spatiale. On considère un vaisseau de masse totale $m = 100$ kg muni d'une voile solaire de surface $S = 1,15 \cdot 10^5$ m² (correspondant à un carré de 340 m de côté). La Terre a une masse

de $6,0 \cdot 10^{24}$ kg et le Soleil une masse de $2,0 \cdot 10^{30}$ kg. On rappelle la valeur de la constante de gravitation universelle $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³.kg⁻¹.s⁻².

14) Comparer la force de pression de radiation et les forces de gravitation exercées sur le vaisseau par le Soleil et par la Terre. A partir de quelle distance de la Terre peut-on négliger la force de gravitation terrestre devant celle du Soleil ? On se placera dans cette approximation dans la suite.

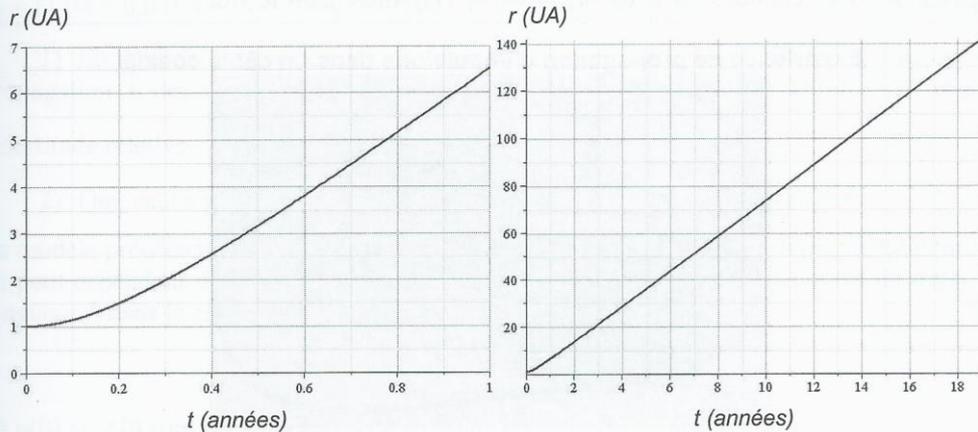
15) Montrer que le mouvement de la voile solaire est rectiligne. En déduire l'équation du mouvement du vaisseau, supposé être lâché sans vitesse initiale depuis la distance $r = d$ du Soleil, sous la forme :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{\alpha}{r^2}$$

où α est une constante que l'on exprimera en fonction des données.

16) Montrer que la force subie par le vaisseau dérive d'une énergie potentielle E_p . Dédurre alors de la conservation de l'énergie mécanique la vitesse maximale V_{max} que peut atteindre la voile solaire et l'évaluer numériquement. Commenter.

Afin de préciser le mouvement de la voile solaire, on a résolu numériquement l'équation différentielle précédente avec les conditions initiales correspondantes. Le graphe de la distance au Soleil r (en UA) en fonction du temps t (en années) est présenté ci-dessous.



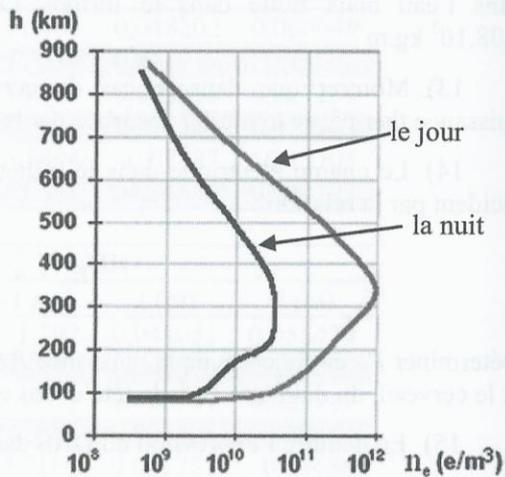
17) Commenter les graphes. Au bout de combien de temps le vaisseau croisera-t-il les orbites de Mars (à 1,5 UA du Soleil), de Saturne (9,5 UA) et de Neptune (30 UA) ? Au bout de combien de temps le vaisseau sera-t-il sorti du Système Solaire ? Evaluer sa vitesse maximale. Conclure.

EXERCICE 2 : Transmission GPS et ionosphère

On étudie dans ce problème l'influence de l'ionosphère sur les ondes électromagnétiques utilisées pour la localisation par satellite (GPS) et les moyens de s'en affranchir.

DOCUMENT n°1 : l'ionosphère

L'ionosphère forme la partie haute de l'atmosphère. Elle se situe entre 100 km et 1000 km d'altitude environ. Sous l'effet du rayonnement solaire, l'ionosphère forme ce que l'on appelle un « plasma », c'est-à-dire qu'elle est partiellement ionisée (d'où son nom). La densité volumique des électrons libres de se déplacer au sein de l'ionosphère fluctue énormément, et cela suivant de nombreux facteurs, comme par exemple la position du soleil dans le ciel, l'activité solaire ou encore la température. Sur le graphe ci-contre est représentée la densité typique d'électrons libres en fonction de l'altitude en plein jour et en pleine nuit.



DOCUMENT n°2 : le système de localisation GPS

La localisation par GPS (*global positioning system*) a été développée par l'armée américaine au début des années 70. Disponible depuis déjà de nombreuses années pour le domaine civil, elle s'appuie sur la présence de 24 satellites en orbite autour de la Terre à environ 20 000 km d'altitude. La localisation de l'appareil GPS est déduite de la mesure des temps de trajet d'ondes électromagnétiques émises par quatre satellites et reçues par l'appareil. Il faut bien au minimum quatre mesures pour déterminer d'une part les trois coordonnées de l'appareil GPS que sont sa latitude, sa longitude et son altitude et d'autre part pour synchroniser l'horloge de l'appareil qui est beaucoup moins précise que les horloges atomiques contenues dans les différents satellites.

Les transmissions GPS s'effectuent par modulation de phase numérique sur deux bandes de fréquence :

- la bande L1 de fréquence centrale $f_1 = 1575,42$ MHz
- la bande L2 de fréquence centrale $f_2 = 1227,60$ MHz.

On rappelle les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

Charge d'un électron : $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C,
Masse d'un électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,
Permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹,

ainsi que la formule : $\Delta \vec{E} = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \text{rot}(\text{rot}(\vec{E}))$.

1) A la lecture des documents et en utilisant vos connaissances sur la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma, expliquer qualitativement le problème que pose la traversée de l'ionosphère des signaux GPS.

La suite du problème propose de quantifier ce problème. On note n_e la densité volumique (supposée dans un premier temps uniforme) d'électrons libres de se mouvoir dans l'ionosphère (on néglige tout frottement) et l'on néglige le déplacement des ions.

2) Justifier ce dernier point.

On considère dans le plasma une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω . On admet que l'ionosphère reste localement neutre même en présence de l'onde.

3) Ecrire l'équation du mouvement d'un électron libre. On négligera dans la suite l'accélération convective. Faire une autre approximation.

4) Montrer que l'ionosphère se comporte comme un conducteur avec une conductivité complexe $\underline{\sigma}$ que l'on explicitera.

5) Calculer la puissance volumique moyenne cédée aux électrons par le champ électromagnétique. Commenter.

6) Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique de l'onde. En déduire la relation de dispersion $k = f(\omega)$. Faire apparaître une pulsation ω_c .

7) Décrire en quelques mots l'onde si $\omega < \omega_c$. A quel type de filtre peut-on assimiler le plasma ?

8) Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour $\omega > \omega_c$. Tracer l'allure des graphes.

9) Calculer la fréquence de coupure f_c typique de l'ionosphère en plein jour et en pleine nuit. Expliquer pourquoi la transmission radio en AM (vers les 100 kHz) ne nécessite qu'un émetteur national alors que la transmission FM (émission autour de 100 MHz) nécessite des antennes régionales.

10) Montrer que le retard des signaux dû à la traversée d'une longueur L d'ionosphère (comparé au cas d'une propagation dans le vide) vaut approximativement :

$$\tau_{\text{retard}} = \frac{L}{c} \frac{f_c^2}{2f^2}$$

11) Estimer la longueur L d'ionosphère que doit traverser les ondes provenant d'un satellite situé à l'horizon. On rappelle que le rayon de la Terre vaut 6400 km.

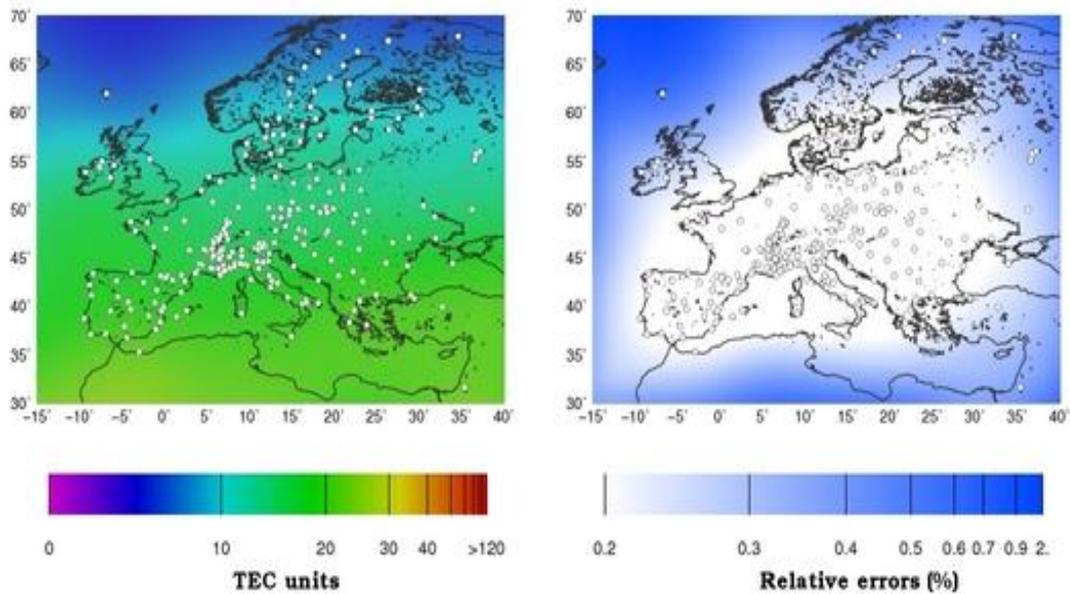
12) Estimer dans le cas le plus défavorable l'erreur induite par la traversée de l'ionosphère sur l'estimation de la distance entre le satellite et l'appareil GPS. Est-ce une erreur systématique qui peut être enlevée de manière automatisée ?

13) Expliquer en quoi l'utilisation simultanée des deux bandes L1 et L2 permet de résoudre le problème.

Afin de mieux prendre en compte l'effet de l'ionosphère sur les ondes radio, le projet SPECTRE, développé initialement par le Ministère français de la Recherche, l'Agence Spatiale Européenne (ESA) et le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), mis en service depuis 2004, propose une cartographie en temps réel du TEC (*Total Electron Content*) au dessus de l'Europe. Le TEC est par définition le nombre total d'électrons libres présents dans une colonne verticale d'ionosphère de 1 m^2 de section.

14) En prenant en compte la dépendance de n_e suivant l'altitude, adapter la formule de la question 10 et montrer que, dans le cas où le satellite est à la verticale de l'appareil GPS, le retard ionosphérique τ_{retard} dépend directement du TEC.

SPECTRE TEC maps 2016/02/01 12:00:00



<http://www.noveltis.com/spectre/interface/applications/applications.html>