

TD N°18 - COAXIAL

La ligne présente une capacité linéique C_0 , une inductance linéique L_0 et une résistance linéique R car les conducteurs (1) et (2) ne sont pas des conducteurs parfaits. Une conductance transversale linéique G complète le schéma équivalent pour modéliser les pertes transversales. Une portion de ligne est représentée sur la figure 3.

D1. Etablir les équations exprimant les dérivées partielles $\frac{\partial v(z,t)}{\partial z}$ et $\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}$, en fonction de $v(z,t)$, $i(z,t)$, $\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$, R , G , L_0 et C_0 .

D2. En déduire une équation de propagation pour la tension $v(z,t)$. A quelle équation l'intensité $i(z,t)$ satisfait-elle ?

Considérons une onde $\underline{v}(z,t) = v_0 e^{j(\omega t - kz)}$ (en notation complexe), se propageant sur la ligne. \underline{k} est une grandeur complexe tel que $\underline{k} = k' + jk''$ où k' et k'' sont des nombres réels.

D3*a. Déterminer la relation de dispersion liant \underline{k} à ω .

D3*b. Définir la vitesse de phase v_φ et une grandeur δ caractéristique de l'atténuation en fonction de k' et de k'' .

D3*c. Pour le cas où $R \ll L_0\omega$ et $G \ll C_0\omega$, on donne les expressions de v_φ et δ ; commenter.

$$v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{G}{C_0\omega} - \frac{R}{L_0\omega} \right)^2 \right] \quad \text{et} \quad \delta = \frac{2\sqrt{L_0 C_0}}{GL_0 + RC_0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R}{L_0\omega} \times \frac{G}{C_0\omega} \dots \right]$$

Dans toute la suite du problème la ligne est supposée être une ligne idéale, dont les caractéristiques sont telles que $R = 0$ et $G = 0$.

D4*a. Montrer que l'équation aux dérivées partielles relative à la tension s'écrit :

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \quad \text{où } u \text{ est un coefficient que l'on explicitera.}$$

Quelle est la dimension de u ?

Quelle est la forme générale des solutions de cette équation ?

D4*b. Retrouver que l'intensité $i(z,t)$ vérifie une équation de propagation.

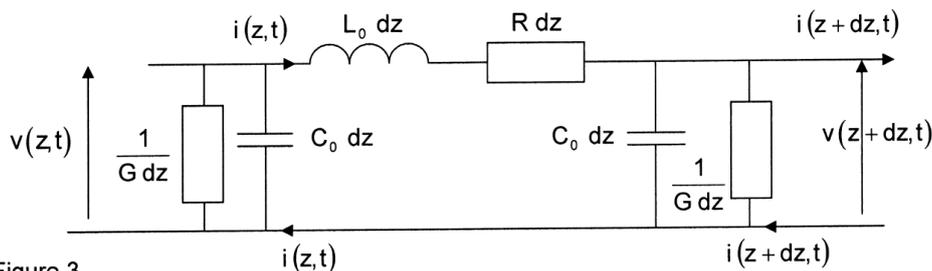


Figure 3

Il sera admis que les solutions générales s'écrivent sous la forme :

$$v(z,t) = v_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + v_2\left(t + \frac{z}{c}\right) \quad \text{et} \quad i(z,t) = i_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + i_2\left(t + \frac{z}{c}\right).$$

D4*c. Interpréter les significations physiques des grandeurs d'indice 1 et 2.

D4*d. Montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} v_1\left(t - \frac{z}{c}\right) = R_C i_1\left(t - \frac{z}{c}\right) \\ v_2\left(t + \frac{z}{c}\right) = -R_C i_2\left(t + \frac{z}{c}\right) \end{cases} \quad \text{Que représente } R_C?$$

F. SIGNAUX IMPULSIONNELS

Dans cette partie le générateur de tension est modélisé à l'aide d'une force électromotrice variable $e(t)$ en série avec R_G (figure 5), telle que pour $t < 0$, $e(t) = 0$ et pour $t \geq 0$, $e(t) = E$.

F1. En écrivant quatre relations en $z = \ell$, à savoir :

- une relation [$\mathcal{R} a$], entre $v_s(t)$, R_U et $i_s(t)$,
- une relation [$\mathcal{R} b$], entre $v_s(t)$, $v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$ et $v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)$,
- une relation [$\mathcal{R} c$], entre $i_s(t)$, $i_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$ et $i_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)$,
- une relation [$\mathcal{R} d$], entre $i_s(t)$, $v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right)$, $v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right)$ et R_C ,

montrer que :

$$v_2\left(t + \frac{\ell}{c}\right) = \alpha v_1\left(t - \frac{\ell}{c}\right) \quad \text{pour } t \geq \frac{\ell}{c}, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{R_U - R_C}{R_U + R_C}$$

En déduire que : $v_2(t) = \alpha v_1\left(t - \frac{2\ell}{c}\right)$.

Quelle est la signification physique de α ?

Calculer α pour $R_U = 0$, $R_U = R_C$ et $R_U = \infty$.

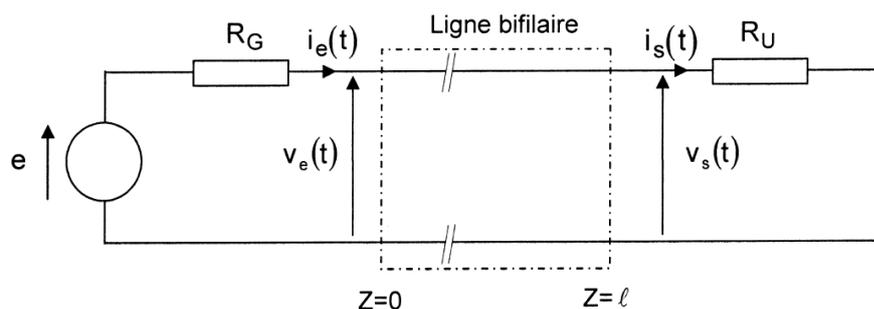


Figure 5

F2. De même, en écrivant quatre relations en $z = 0$, à savoir :

- une relation [$\mathcal{R} e$], entre $v_e(t)$, E , R_G et $i_e(t)$,
- une relation [$\mathcal{R} f$], entre $v_e(t)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$,
- une relation [$\mathcal{R} g$] entre $i_e(t)$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$,
- une relation [$\mathcal{R} h$] entre $i_e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et R_C ,

montrer que : $v_1(t) = \frac{E}{2}$ pour $t \geq 0$ et pour $R_G = R_C$.

F3. Pour $R_G = R_C$, tracer les graphes des tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ pour les valeurs suivantes de R_U : $R_U = 0$, $R_U = R_C$ et $R_U = \infty$. (Pour chacun de ces graphes, placer les instants $\frac{\ell}{c}$ et $\frac{2\ell}{c}$)

F4. En reprenant l'étude précédente pour R_G et R_U quelconques, donner l'expression de $v_e(0)$ et $v_e(\infty)$ en fonction de R_G et R_U .

Quel est le schéma électrique équivalent en régime établi ?

Décrire qualitativement le fonctionnement du circuit pendant le régime transitoire.

Reprenons l'étude avec une « impulsion » définie par :

$$e(t) = 0, \text{ pour } t < 0 ; \quad e(t) = E \text{ pour } 0 < t \leq \frac{\ell}{c}, \quad ; \quad e(t) = 0, \text{ pour } t > \frac{\ell}{c}.$$

F5. En considérant que $R_G = R_C$, étudier et tracer le graphe de $v_e(t)$ pour les valeurs suivantes de R_U : $R_U = 0$, $R_U = R_C$ et $R_U = \infty$. Pour chacun de ces graphes, placer les instants $\frac{\ell}{c}$, $\frac{2\ell}{c}$, $\frac{3\ell}{c}$.