TD N°11 – DIFFUSION

Exercice 1 : Centrale PC 2010 (extrait)

Quelques situations physiques liées aux explosions nucléaires

Les recherches sur le noyau d'uranium ont mis en évidence le phénomène de fission nucléaire en 1939 ; ces travaux ont trouvé leur première application lors de l'explosion de la bombe d'Hiroshima, le 6 août 1945. Il va de soi que l'invention de la « bombe atomique » n'est peut-être pas le plus grand progrès de l'Humanité. Mais en l'état actuel des choses, cette arme existe, et il est souhaitable d'en aborder l'aspect physique pour mieux en saisir les tenants et aboutissants scientifiques. Ce problème comporte **quatre parties totalement indépendantes**.

On rappelle par ailleurs les expressions d'analyse vectorielle :

- En coordonnées sphériques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{U}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rU_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Partie I - La désintégration de l'uranium 235

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes ; le plus répandu à l'état naturel, U^{238}, possède 92 protons et 146 neutrons ; l'autre isotope est U^{235} dit isotope « fissile ». Lorsqu'un noyau U^{235} est heurté par un neutron (noté n), il peut « fissionner », suivant la réaction suivante : $^{235}U_{92} + n \rightarrow X + Y$ + plusieurs neutrons + énergie, où X et Y sont deux noyaux le plus souvent radioactifs.

Le nombre moyen de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d'U^{235} est $\nu \approx 2,5$. On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d'U^{235} est en moyenne de $170 \cdot 10^6 eV$ $(1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J)$. Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

I.A - Diffusion de neutrons

I.A.1) Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d'U^{235} ?

I.A.2) L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de $4,2 \cdot 10^9$ Joule. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d'U^{235}, exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.

I.A.3) Soit $N(x, y, z, t)$ le nombre de neutrons par unité de volume, et $\vec{J}$ le vecteur densité de flux de neutrons, tel que $\vec{J} \cdot \overrightarrow{dS}\ dt$ représente le nombre de neutrons traversant la surface $\overrightarrow{dS}$ pendant l'intervalle de temps dt. On donne l'équation fondamentale de la neutronique :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J} + \left(\frac{\nu - 1}{\tau}\right) N(x, y, z, t).$$

On rappelle de plus la loi de Fick $\vec{J} = -D\overrightarrow{\text{grad}}N$ et la relation $\operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}}N) = \Delta N$.

a) En vous aidant d'analogies avec d'autres domaines de la Physique, pouvez-vous interpréter les deux termes situés à droite de l'égalité ?

b) Quelle interprétation proposez-vous pour la constante τ ?

c) Expliquer, en particulier, pourquoi $\nu - 1$ intervient dans le terme de droite, et pas ν.

I.B - Masse critique

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.

I.B.1) *Calcul de la masse critique dans le cas d'une boule d'uranium 235 pur, de rayon R*

On suppose que le problème est à géométrie sphérique de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$N = N(r, t) = N_1(r)e^{\nu' t/\tau} \text{ et } \vec{J}(r,t) = -D\frac{\partial N}{\partial r}\vec{e_r}.$$

Dans cette situation, on a :

$$\Delta N_1 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dN_1}{dr}\right).$$

a) On pose

$$g(r) = rN_1(r) \text{ et } \alpha^2 = \left|\frac{\nu' - \nu + 1}{D\tau}\right| ;$$

montrer que la fonction $g(r)$ est solution d'une équation différentielle très classique. On recherche une fonction $r \to N_1(r)$ telle que $N_1(r = R) = 0$, que N_1 ne s'annule pas pour $r \in]0, R[$ et telle que N_1 tende vers une limite finie quand r tend vers zéro. Montrer que c'est possible si

$$\nu' = (\nu - 1) - \frac{\pi^2 D\tau}{R^2}.$$

b) Interpréter le fait que ν' augmente si R croît.

c) Quelle est la différence fondamentale entre les cas $\nu' > 0$ et $\nu' < 0$?

d) Exprimer le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de D, τ et ν.

e) On donne pour U_{92}^{235} de masse volumique $\rho = 19 \cdot 10^3 \text{kg m}^{-3}$: $\pi^2 D\tau = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{m}^2$ et $\nu = 2,5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c, ainsi que la masse critique M_c (masse de la boule d'uranium de rayon R_c).

I.B.2) *Mise en œuvre d'une bombe nucléaire*

Pour des raisons évidentes, on ne peut pas stocker sans précautions une masse d'uranium supérieure à la masse critique. Quelle disposition raisonnable pouvez-vous suggérer pour le conditionnement d'une arme nucléaire, embarquée dans un missile ? Comment pourrait-on déclencher l'explosion ?

Exercice 2 : Double vitrage

1) On considère une vitre d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ. La température est T_e à l'extérieur et T_i à l'intérieur de la pièce. Calculer la résistance thermique de la vitre et le flux thermique qui la traverse.

2) On considère maintenant un double vitrage constitué de deux vitres d'épaisseur e, de surface S, de conductivité thermique λ, séparées par une couche d'air d'épaisseur e'. La conductivité thermique de l'air est notée λ'. Mêmes questions. Conclusion.

3) Déterminer la répartition des températures dans le double vitrage, en particulier les températures aux interfaces verre-air et air-verre. Donner l'allure de la courbe T(x), où x est la coordonnée correspondant à l'épaisseur du système.

On donne : $\lambda = 1.2$ W.m^{-1}K^{-1}, $\lambda' = 0.025$ W.m^{-1}K^{-1}, $e = e' = 1$ mm, $T_e = 7$ °C, $T_i = 17$ °C, $S = 0.5$ m^2.

Exercice 3 : Régime lentement variable

Une barre (B) cylindrique d'axe (Ox), de longueur L, de section S, de chaleur massique c_B, de masse volumique µ et de conductivité thermique K est reliée (par ses extrémités) à deux corps $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de capacités calorifiques respectives C_1 et C_2, de températures initiales respectives $T_{0,1}$ et $T_{0,2}$. L'ensemble {barre + $\mathcal{C}_1$ + $\mathcal{C}_2$} est parfaitement calorifugé. On suppose que C_1 et C_2 sont très supérieures à la capacité calorifique de la barre $C_B = c_B\mu LS$. On appelle $T_1(t)$ la température de $\mathcal{C}_1$ à l'instant t (de même pour $\mathcal{C}_2$) et $T(x, t)$ celle de la section d'abscisse x de la barre à l'instant t.

1) Déterminer les équations reliant $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$ à $T_1(t)$ et $\frac{\partial T}{\partial x}(L,t)$ à $T_2(t)$.

2) Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$. Compte tenu de l'hypothèse faite sur C_1, C_2 et C_B, montrer que l'on peu considérer le régime d'évolution de la température de la barre comme quasi-stationnaire. Déterminer alors T_1(t) et $T_2(t)$.

Justifier *a posteriori* l'hypothèse faite en comparant le temps caractéristique d'évolution de T_1(t) et de $T_2(t)$ à la durée caractéristique de la diffusion thermique dans la barre.

3) Compte tenu de l'hypothèse $c_B \approx 0$, que vaut la variation d'entropie d'une tranche de (B) comprise entre x et $x+dx$, entre t et $t+dt$?

4) Calculer l'entropie échangée δS_e par cette tranche pendant la durée dt.

5) En déduire l'expression de s_C, entropie créée par unité de temps et de volume dans (B) en fonction de T_1, T_2, K, L et x.

6) Intégrer cette expression d'abord sur toute la longueur de (B) puis sur toute la durée de la transformation (c'est-à-dire jusqu'à t_∞). En déduire que l'entropie créée dans toute la barre, pendant la durée de la transformation est :

$$S_C = 2\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\ln\left(\frac{T_{0,1}+T_{0,2}}{2\sqrt{T_{0,1}T_{0,2}}}\right).$$

7) Calculer la variation d'entropie des corps $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au cours de la transformation. Commenter.