

ψ^* 2016 : TD du 6 septembre (semaine 1)

Séries numériques

1. Déterminer la nature des séries de terme général :

a. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$

b. $u_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$

c. $u_n = \frac{1}{n (\ln n)^\alpha}$

d. $u_n = F(n)z^n$, où F est une fraction rationnelle et z est un complexe non nul.

2. Soit $U : n \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (et donc $U_0 = 0$ car somme vide).

a. On pose $v_n = U_n - \ln n$, $d_n = v_n - v_{n-1}$ pour $n \geq 2$, $d_1 = v_1$.

Trouver un équivalent simple de d_n .

b. Montrer que la suite v converge.

c. En déduire un équivalent de U_n .

3. Soit $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$ où U a été définie à l'exercice précédent, et x est réel.

a. Déterminer son domaine de définition, ie l'ensemble des x pour lesquels la série converge.

b. On admet que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Trouver une expression explicite de F .

4. Nature de $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.