

I) Introduction : équation différentielle

L'équation différentielle type est celle donnant la tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série. Avec Q coefficient de qualité et ω_0 pulsation propre

$$u_e(t) = u_s(t) + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du_s}{dt} + \left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) \frac{d^2u_s}{dt^2} \quad (\text{E}) \quad \text{ou} \quad u'_e(t) = \omega_0^2 u_s(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \frac{d^2u_s}{dt^2}$$

Le terme en dérivée première est dit terme d'amortissement. On introduit aussi $m = \frac{1}{2Q}$ noté aussi σ appelé coefficient d'amortissement du système.

II) Régime libre : $u_e(t) = 0$

Il correspond à un oscillateur **amorti** sans contrainte donc à une équation sans second membre. L'allure des solutions est donné par l'étude du discriminant de l'équation caractéristique. On introduit $\omega = \omega_0 \sqrt{|1 - m^2|} = \omega_0 \sqrt{|1 - (1/2Q)^2|}$ la pseudo-pulsation.

1) Solution pseudo-périodique si $\Delta < 0$ soit $Q > 1/2$ (l'amortissement est faible).

$$u_s(t) = e^{-\frac{1}{2Q}\omega_0 t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

2) Solution apériodique si $\Delta > 0$ soit $Q < 1/2$ (l'amortissement est fort).

$$u_s(t) = e^{-\frac{1}{2Q}\omega_0 t} (A \cosh \omega t + B \sinh \omega t) \quad (\text{ou préférable}) \quad u_s(t) = e^{-\frac{1}{2Q}\omega_0 t} (A' e^{\omega t} + B' e^{-\omega t})$$

3) Solution apériodique critique si $\Delta = 0$ soit $Q = 1/2$ $u_s(t) = e^{-\omega_0 t} (A + Bt)$

Rem: les coefficients introduits dépendent de conditions initiales (C.I). Toutes ces fonctions tendent vers zéro. Cela traduit la stabilité des systèmes physiques associés.

III) Régime quelconque Les solutions **de l'équation (E)** sont données par

$u_s(t) = u_{\text{homogène}}(t) + u_{\text{particulière}}(t)$ où la solution homogène est celle de l'équation sans second membre décrite au II) qui **tend vers zéro**. L'allure de la solution dépend donc **de $u_e(t)$** et bien sûr **des conditions initiales**.

IV) Réponse indicielle : $u_e(t) = E$

La **réponse à un échelon**, appelée réponse indicielle, modélise une excitation dont le temps d'établissement est négligeable devant les temps caractéristiques du système. En électricité cela correspond à appliquer, instantanément, une tension continue E à l'entrée du quadripôle.

Un régime continu s'établit correspondant à $u_{\text{particulière}} = \text{cste}$.

V) Régime sinusoïdal forcé : On force un régime sinusoïdal grâce à **$u_e(t) = V_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t)$** .

L'usage des complexes est commode. La fonction de transfert correspondant à l'équation

différentielle est alors avec $x = \omega/\omega_0$:

$$\mathbf{T(jx)} = \frac{1}{1 + j\frac{x}{Q} + j^2 x^2}$$

L'allure du gain en fonction de la pulsation dépend de la valeur du coefficient de qualité Q.