Semaine du 2 octobre 2017

Normes et espaces vectoriels normés

1. Normes et distances

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Une application N de E dans $\mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie

(1) $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

(2) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

(3) $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Csq : $N(0) = 0$, $N(-x) = N(x)$ $\forall (x, y) \in E^2, \quad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ (*)
Structure d'espace vectoriel normé. Vecteurs unitaires.

Distance associée à une norme. Inégalité triangulaire.

Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.(*)

Parties, suites, fonctions bornées.

Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. (*)
Normes $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.(*)
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.(*)
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.(*)

Produit fini d'espaces vectoriels normés.(*)

Normes équivalentes. Exemples de normes non équivalentes (*).
Applications lipschitziennes. Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E est lipschitzienne.(*)

2. Suites dans un espace vectoriel normé

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés.
Suites extraites, valeurs d'adhérence. Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
Vocabulaire relatif aux séries. Invariance du caractère borné, de la convergence par changement de normes équivalentes.