DS N°5 - PARTIE 2

Ondes sonores - CCS PC

24. $p_1 \ll p_0$, $\mu_1 \ll \mu_0$ et $v_1 \ll c_s$

25. $\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}}_{\text{terme NL}}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p \Rightarrow \mu_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1 \underset{Ox}{\Rightarrow} \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} e_x$

$(\vec{v_1} \,//\, Ox)$

26. $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \,\text{div}\, \vec{v_1} = 0 \underset{Ox}{\Rightarrow} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$

27. $\chi_s \hat{=} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p}\Big|_s \underset{\text{isoS}}{=} \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dp} \simeq \frac{1}{\mu_0}\frac{\mu_1}{p_1} \Rightarrow \mu_1 = \mu_0 p_1 \chi_s$

terme NL

28. rem : dimo générale (HS)

$\mu_0 \,\text{div}\, \vec{v_1} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 p_1 \chi_s) = -\mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \underset{\partial/\partial t}{\Rightarrow} -\underbrace{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, p_1)}_{\Delta p_1} = -\mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$$

Cas selon Ox :

$$\begin{cases} \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \end{cases}$$

2 eq de couplage

$$\Rightarrow \begin{cases} \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \end{cases} \underset{\text{th. de Schwartz}}{\Longrightarrow} \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$$

29. GP, iso-S $\underset{\text{de Laplace}}{\overset{\text{loi}}{\Rightarrow}}$ $p\mu^{-\gamma} = \text{cst} \underset{\log}{\overset{\text{dif}}{\Longrightarrow}} \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu} \underset{\text{acoust}}{\overset{\text{ap.}}{\Longrightarrow}} \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{p_1}{p_0}$

de + : $\frac{p_0}{\mu_0} = \frac{RT}{M} \Rightarrow \gamma \mu_1 \frac{RT}{M} = p_1$ et $\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1 = \frac{p_1}{c^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\gamma R T}{M}\frac{1}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = 348\ m.s^{-1}$$

à 300K

avec : $\gamma = 1,4$ et $M(\text{air}) = 0,2 \times M_{O_2} + 0.8\, M_{N_2}$

$\simeq 29\ g.mol^{-1}$

30. $c_s = 972\ m.s^{-1}$ avec $\begin{cases} \gamma = 5/3 \quad (\text{gaz monoat}) \\ T = 273 \\ M = 4,0\ g.mol^{-1} \end{cases}$

31. Il suffit d'isoler k_B dans l'express° de c_s à Q25 $\Rightarrow c_s^2 = \frac{\gamma N_a k_B T}{M}$

$$\Rightarrow \quad k_B = \frac{M}{\gamma N_a T} c_s^2$$

32 $\Delta p_1 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$ (cf Q28)

33 On suppose $p_1(M,t) = p_1(r,t) \Rightarrow \Delta p_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r p_1)}{\partial r^2} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 (r p_1)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r p_1)}{\partial t^2}}_{\text{eq. de d'Alembert}}$

soit $r p_1(r,t) = \underbrace{f(r - ct)}_{\text{Onde prog divergente}} + \underbrace{g(r+ct)}_{\text{onde. prog convergente}}$

34. la linéarité de l'équat° permet d'utiliser la décomposit° en série de Fourier d'1 fct° périodique et donc de limiter l'étude à des fct° harmoniques.

35. On a :

$$\mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{v_1}}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\, \underline{p_1} = -\frac{\partial \underline{p_1}}{\partial r}\vec{e_r} = \underline{A}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)e^{i(\omega t - kr)}\vec{e_r} + \underline{B}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)e^{i(\omega t + kr)}\vec{e_r}$$

($\vec{cst} = \vec{0}$ car pas une onde)

$$\underline{\vec{v_1}} = \frac{\underline{A}}{\mu_0 i\omega}\left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{i(\omega t - kr)}\vec{e_r} + \frac{\underline{B}}{\mu_0 i\omega}\left(-\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{i(\omega t + kr)}\vec{e_r}$$

36. $D_v = \iint \vec{v_1}\cdot\vec{dS} = 4\pi r^2 v_1 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow r^2 v_1 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$

or $r^2 \underline{v_1} = \frac{1}{\mu_0 i\omega} e^{i(\omega t - kr)}\vec{e_r}\left(\underline{A}(rik + 1) + \underline{B}(1 - rik)\right) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu_0 i\omega} e^{i\omega t}\vec{e_r}(\underline{A} + \underline{B})$

donc $\underline{B} = -\underline{A}$ Il y a + simple ! p_1 ne diverge pas en 0.

37. les modes propres st des ondes stationnaires solut° de l'éq. de propagat° et vérifiant les CAL.

or $$\underline{\vec{v_1}} = \frac{A}{\mu_0 i\omega}\left[\left(\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{i(\omega t - kr)} - \left(-\frac{ik}{r}+\frac{1}{r^2}\right)e^{i(\omega t + kr)}\right]\vec{e_r}$$

$$\underline{\vec{v_1}} = \frac{A}{\mu_0 i\omega}\left[\frac{ik}{r}\left(e^{i(\omega t - kr)} + e^{i(\omega t + kr)}\right) + \frac{1}{r^2}\left(e^{i(\omega t - kr)} - e^{i(\omega t + kr)}\right)\right]\vec{e_r}$$

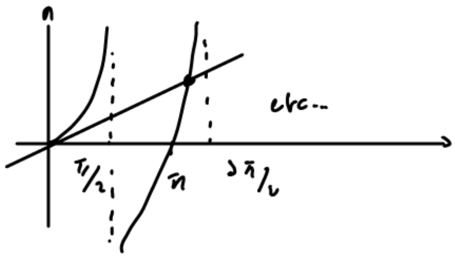
en $r = r_s$, il faut $\underline{v_1} = 0 \ \forall t \Rightarrow \frac{ik}{r}\left(e^{ikr_s} + e^{-ikr_s}\right) + \frac{1}{r_s^2}\left(e^{-ikr_s} - e^{ikr_s}\right) = 0$

$ik\left(\cos(kr_s)\right) = \frac{i}{r_s}\sin(kr_s)$

éq. des modes propres $kr_s = \tan(kr_s)$ avec : $k = \frac{\omega}{c_s} = \frac{2\pi f}{c_s}$

38

posons $X = r_s k$, il faut résoudre $X = \tan(X)$



Il y a 1 solut° par intervalle (de X) $[n\pi, n\pi + \pi/2]$

$\Rightarrow n\pi \leq k_n r_s \leq (n+\frac{1}{2})\pi$

$n\pi \leq 2\pi f_n \frac{r_s}{c_s} \leq (2n+1)\pi/2$

si $n \gg 1$ $\quad f_n \simeq (2n+1)\frac{c_s}{4r_s}$ (partie de droite de l'intervalle)

39. On est tenté de dire que $f_1 = 3\frac{c_s}{4r_s}$ mais la solut° précédente n'est valable que si $n \gg 1$ ...

Il reste donc une résolut° numérique de $X = \tan(X) \Rightarrow X = 4,49 = 2\pi f_1 \frac{r_s}{c_s}$

1ère solut° entre π et $3\pi/2$

$f_1 = \frac{c_s \times 4.49}{2\pi\ r_s}$ avec $D = \frac{4}{3}\pi r_s^3 \Rightarrow r_s = \left(\frac{3D}{4\pi}\right)^{1/3}$

$f_1 \simeq 7681$ Hz