Mesures et Incertitudes

1 Cas d'une mesure directe

Par mesure directe j'entends le cas ou la grandeur à mesurer l'est directement par l'appareil de mesure : une distance , une tension, une intensité etc...

Les mesures présentent une variabilité que l'incertitude type permet de caractériser.

Voir aussi le document Incertitudes (1) dans le même dossier sur le site

1.1 incertitude de type B : 1 seule mesure

Dans ce cas, on a une seule mesure m. Notons Δm la précision (ou l'estimation de celle-ci...) sur la mesure (fournie par le fabricant de l'appareil, estimée par vous, ...)
On écrira le résultat sous la forme

$$\boxed{M = m \pm \frac{\Delta m}{\sqrt{3}} \text{ "unité"}}$$

N'oublions pas les chiffres significatifs : il faut limiter le nombre de chiffres significatifs de l'incertitude à deux : exemple m=34,543 et $\Delta m = 0.876$ on écrira : $m = 34,5 \pm 0.9/\sqrt{3}$ "unité"
$\boxed{u_m = \frac{\Delta m}{\sqrt{3}}}$ est l'incertitude type associée à m.

1.2 incertitude de type A

1.2.1 1er cas : n mesures indépendantes d'une grandeur

La meilleure estimation de la valeur à mesurer est sa moyenne obtenue à partir des n mesures. Il faut avoir conscience que c'est *une* moyenne parmi une infinité. Si vous effectuez d'autres mesures, vous aurez une autre moyenne.
On note m la moyenne, et m_k avec $(1 \leq k \leq n)$ les n mesures.

$$\boxed{m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

L'incertitude type u_m est alors l'écart type σ des mesures.

$$\boxed{u_m = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(m_i - m)^2}}$$

$$\boxed{M = m \pm u_m \text{ "unité"}}$$

1.2.2 2eme cas : on répète N' fois le 1er cas

Supposons que l'on dispose d'un ensemble $x_1, x_2 \ldots, x_n$ de n mesures de la grandeur (cas précédent). On répète N' fois (N' grand) ce protocole. Chacune des j séries ($j \in [1, N']$) est de moyenne $\overline{X_j} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ et d'incertitude type u_x (l'écart type de ces n mesures).
Le résultat final des mesures est la moyennes des N' valeurs $\overline{X_j}$ ($j \in [1, N']$)

$$< X >= \frac{1}{N'}\sum_{k=1}^{N'} \overline{X_k}$$

tandis que l'incertitude type est divisée par $\sqrt{N'}$

$$u(< X >) = \frac{u_x}{\sqrt{N'}}$$

Une valeur moyenne possède une variabilité plus petite que la grandeur de base.

L'utilisation de python va venir à notre secours pour ce qui est des grandes valeurs de n ou de N'

2 Cas d'une grandeur calculée à partir de grandeurs mesurées

C'est le cas par exemple si l'on calcule une valeur de résistance à partir d'une mesure directe de tension et d'une mesure directe d'intensité : R = $\frac{U}{I}$,

ou lorsque l'on détermine une distance focale à partir de la mesure de position d'objet et d'image :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

En chimie, c'est le cas lorsque l'on détermine une concentration à partir de volumes mesurés (burette et/ou pipette) et de concentration(s) connue(s) : $C_{(?)} = C_0 \frac{V_0}{V_{éq}}$.

Les cas cités correspondent à une grandeur donnée par un produit (ou un rapport) ou une différence (ou une somme) ; ce sont les seuls au programme.

2.1 Calcul direct de l'incertitude type

- si **X = Y – Z** ou **X = Y + Z** alors : $\mathbf{u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}}$.

- si **X = Y×Z** ou **X = Y/Z** alors : $\mathbf{\frac{u(X)}{X} = \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}}$

- si $\mathbf{X = Y^n}$ alors : $\mathbf{\frac{u(X)}{X} = n\frac{u(Y)}{Y}}$

EN CONCLUSION : **X = x ± u(X)**

Par convention, l'incertitude est arrondie à la valeur supérieure avec au plus deux chiffres significatifs, et les derniers chiffres significatifs conservés pour la valeur mesurée *m* sont ceux sur lesquels porte l'incertitude u.

2.2 Calcul par algorithme de Monte-Carlo

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, ...)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.
La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y, qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i .
Pour cela, il faut :
◇ Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
◇ Pour k entre 1 et N, réaliser
- un tirage aléatoire pour chaque x_i
- utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k
- sauvegarder cette valeur y_k

◇ l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k. La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y.
Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.
En règle général en CPGE, les x_i sont mesurés avec une précision. En dessous de cette précision, l'étudiant est incapable d'accéder à une information sur la distribution de probabilité. On privilégie donc la distribution uniforme de probabilité, cohérente avec l'expérience pratique de l'étudiant.

attention

Il ne faut pas oublier qu'en notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut $u = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$

↪ Pour simuler la distribution uniforme de probabilité on utilise la fonction uniform de la bibliothèque random du module numpy (alias np dans les programmes).

numpy.random.uniform

numpy.random.uniform(*low=0.0, high=1.0, size=None*)

Draw samples from a uniform distribution.

Samples are uniformly distributed over the half-open interval `[low, high)` (includes low, but excludes high). In other words, any value within the given interval is equally likely to be drawn by uniform.

Parameters: low : *float or array_like of floats, optional*

Lower boundary of the output interval. All values generated will be greater than or equal to low. The default value is 0.

high : *float or array_like of floats*

Upper boundary of the output interval. All values generated will be less than high. The default value is 1.0.

size : *int or tuple of ints, optional*

Output shape. If the given shape is, e.g., `(m, n, k)`, then `m * n * k` samples are drawn. If size is `None` (default), a single value is returned if `low` and `high` are both scalars. Otherwise, `np.broadcast(low, high).size` samples are drawn.

Returns: out : *ndarray or scalar*

Drawn samples from the parameterized uniform distribution.

2.2 Fichiers à disposition et travail à effectuer

- Vous disposez d'un fichier « Mesure Résistance » qui vous permet de comprendre le principe de la détermination de l'incertitude type par l'algorithme MC ; lisez le script et exécuter le programme ; faites varier N.

  D'autre part, faites le calcul direct avec la formule du 2.1. ; comparer les deux.

- En récupérant vos résultats du précédent TP de chimie, créer un script identique au précédent mais adapté au dosage de l'ion baryum par conductimétrie. Faites aussi le calcul direct de l'incertitude type avec les résultats du 2.1.

  Vous réfléchirez à la grandeur qui donne la plus grande incertitude expérimentale.

  R : vous pouvez aussi réaliser le même travail avec le dosage des IO_3^-.

- Le dernier fichier (focale) sera utilisé dans le TP de mesures de distances focales (16 et 23 janvier). Si vous avez le temps, vous pouvez lire le script correspondant.