X-ENS PSI 2009 (1)

(A) 1) • $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, MG ; $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, MT ;
$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, MF ; $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, MA.

• En prenant $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E})$ on obtient avec MG : $-\Delta\vec{E}$ et avec MF et MA : $-\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ ; d'où $\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ (1)

• Avec $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B})$ on obtient de même $\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

• En injectant $\underline{\vec{E}}$ dans (1) :
$-k^2 + \dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$ soit $k = \pm\dfrac{\omega}{c}$
(avec $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$).

2) • Compte-tenu de la forme proposée pour $\underline{\vec{E}}$, il vient, à partir de $\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon}$ :

$$\int_{-h/2}^{h/2} E_0 \frac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} 2\pi r\, dz = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}, \text{ car}$$

les deux intégrales sur les bases sont nulles.

D'où $\underline{Q}_{int} = 2\pi\varepsilon E_0 r_0 \dfrac{2\sin(kh/2)}{k} e^{j\omega t}$

et $Q_{int} = 4\pi\varepsilon \dfrac{E_0 r_0}{k} \sin\left(\dfrac{kh}{2}\right)\cos\omega t$

• De même, appliquons le théorème (2) d'Ampère : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I_{enlacé} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}\iint_{\Sigma_\Gamma} \vec{E}\cdot\vec{dS}$

Or $\vec{E}$ est radial dans avec le contour proposé et en prenant pour $\Sigma_\Gamma$ le disque centré sur Oz et de rayon r, $\iint_{\Sigma_\Gamma} \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$ ;

de plus, $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{E_0}{c}\frac{r_0}{r} e^{j(\omega t - kz)} r\,d\theta$

$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\vec{dl} = \dfrac{E_0 r_0}{c} 2\pi\, e^{j(\omega t - kz)}$, soit

$$\underline{I}_{enlacé} = 2\pi r_0 \frac{E_0}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - kz)}$$

et $i_{enlacé} = 2\pi r_0 \dfrac{E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t - kz)$.

3) • $i(z,t)$ correspond à $i_{enlacé}$ et $\underline{i} = \underline{I}_{enlacé} \Rightarrow \alpha = \dfrac{2\pi r_0}{\mu_0 c}$.

• $\underline{i}$ et $\underline{u}$ sont des OPPM avec $k = \pm\dfrac{\omega}{c}$, donc elles vérifient l'équation de D'Alembert.

4) Avec la loi des noeuds et la loi des mailles on obtient au premier ordre en $dz$ : $-\dfrac{\partial i}{\partial z}dz = \Gamma dz \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $-\dfrac{\partial u}{\partial z}dz = \Lambda dz \dfrac{\partial i}{\partial t}$,

où $i$ et $u$ sont calculés en $z$ à $t$.

Après simplifications par $dz$, puis dérivation de l'une % à $t$ et de l'autre % à $z$, on obtient (cf. cours) :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

qui sont 2 équations de D'Alembert.

on retrouve 3) si $\Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$.

D'autre part pour une onde progressive suivant $z \nearrow$, $\underline{u} = R_c \underline{i}$ et le texte nous donne la relation admise $\underline{u} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \underline{i}$.

D'où $R_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ ; comme $R_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$, il vient $\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} = \frac{\Lambda}{\Gamma}$ et $\Lambda\Gamma = \varepsilon_0\mu_0$ d'où

$\Lambda = \mu_0$ et $\Gamma = \varepsilon_0$.

5) en $z$, $u = \sqrt{2} I_0 \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \cos(\omega t - kz)$ et $i = \sqrt{2}\, I_0 \cos(\omega t - kz)$ ; ainsi,

$$P_{EM_L} = 2 I_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kz)\rangle_{temps} \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$$



soit $P_{EM_L} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\, I_0^2$.

6) La longueur $dz$ de câble emmagasine $\left(\frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2\right) dz$ donc $w_{EM_L}$ correspond à la valeur moyenne temporelle de $\frac{1}{2}\Lambda i^2 + \frac{1}{2}\Gamma u^2$ ; avec les expressions de $i$ et $u$ écrites au 5) :

$$w_{EM_L} = \frac{1}{2}\Lambda I_0^2 + \frac{1}{2}\Gamma \frac{\Lambda}{\Gamma} I_0^2 = \Lambda I_0^2$$

- $P_{EM_L} / w_{EM_L} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = c$

7) a)
$$\begin{cases} u_{n-1} = u_n + L \dfrac{di_{n-1}}{dt} & (1) \\ u_n = u_{n+1} + L \dfrac{di_n}{dt} & (2) \\ i_{n-1} - i_n = C \dfrac{du_n}{dt} & (3) \end{cases}$$

Soit en faisant $(1) - (2) + L \frac{d(3)}{dt}$ :

$$u_{n-1} - u_n = u_n - u_{n+1} + LC \frac{d^2 u_n}{dt^2}$$

ou encore : $$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{1}{LC}\left(u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n\right)$$

(b) Injectons $U_0 e^{j(\omega t - kna)}$ dans (a) : (5)

$$-\omega^2 = \omega_0^2 \left[ e^{-jka} + e^{jka} - 2 \right]$$ après simplifications et en notant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

soit $$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2(1 - \cos(ka))$$

(c) Pour avoir la même solution, il faut que $\omega^2 = k^2 c^2$, soit

$$k^2 c^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka)),$$ soit

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} c^2 = 2\omega_0^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)\right);$$ si

$\lambda \gg a$, $\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) \simeq 1 - \frac{4\pi^2 a^2}{2\lambda^2}$, soit

$$\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \omega_0^2 \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda^2}$$ ou $c^2 = \omega_0^2 a^2$.

Or, $\underbrace{c^2 = \frac{1}{\Lambda\Gamma}}$ et $\underbrace{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$

ligne à constantes réparties ⟵ ⟶ ligne à composants discrets.

Donc si la ligne à constantes réparties a une inductance linéique

(6)

$\Lambda = \frac{L}{a}$ et une capacité linéique $\Gamma = \frac{C}{a}$, cela convient.

8) • $a \sim 1$ cm : il faut $\lambda \gg 1$ m ; ondes radiofréquences.

• $a \sim 10\ \mu$m : il faut $\lambda \gg 1$ mm ; ondes millimétriques.

9) (a) $\left(\partial u / \partial z\right) = -\Lambda \left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)$ est inchangée.

L'autre équation de couplage devient après développement à l'ordre 1 en $dz$ :

$$-\left(\frac{\partial i}{\partial z}\right) = \Gamma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \gamma u$$ ; l'élimination

de $i$ par dérivation % à $z$ de la première équation et % à $t$ de la deuxième donne :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Lambda\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

(b) En injectant $U_0 \exp[j(\omega t - \underline{k} z)]$ :

$$\underline{k}^2 = \omega^2 \Lambda\Gamma - j\omega\Lambda\gamma$$

(c) Si l'onde progresse suivant $\vec{z}$, alors $k' > 0$ car le terme de phase est $\exp[j(\omega t - k'z)]$

De (b) on tire $-2j k' k'' = -j\omega\Lambda\gamma$

(et $k'^2 - k''^2 = \Lambda\Gamma\omega^2$)

Soit $k'k'' = \frac{1}{2}\omega\Lambda\gamma$

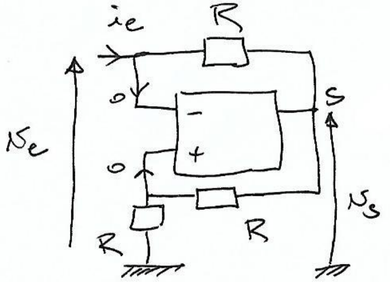
or $\exp(j(\omega t - \underline{k}z)) = \exp[j(\omega t - k'z)]\,e^{-k''z}$

Pour qu'il y ait atténuation, il faut $k'' > 0$

Si $z \nearrow$ donc $k' > 0$, $k'' > 0$, $k'k'' > 0$

et $\gamma > 0$.

10 (a) Prenons la partie $\{R, R, R, AO\}$




$V_- = V_+$ (1)

$V_- = V_e$ (2)

$\frac{V_e - V_s}{R} = i_e$ (3)

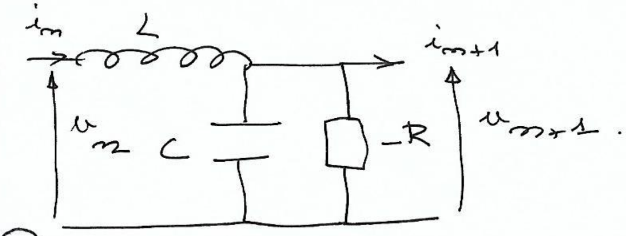
(4) $V_+ = V_- = V_e = \frac{V_s}{2}$

Soit $\frac{V_e - 2V_e}{R} = i_e \Rightarrow i_e = -\frac{V_e}{R}$ donc

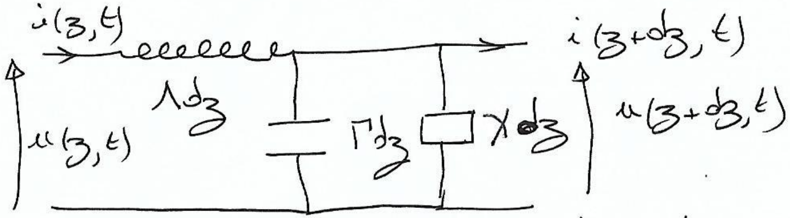
cette partie équivaut à une résistance négative.

L'ensemble est donc :






(b) Si $\frac{2\pi}{k} \gg a$, $\lambda \gg a$ on peut utiliser l'approximation des milieux continus avec le montage et les correspondances suivantes:




$\Lambda = \frac{L}{a}$, $\Gamma = \frac{C}{a}$ et $\chi = -\frac{1}{Ra}$, et aussi:

$\frac{LC}{a^2} = \Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2}\ (= \varepsilon_0\mu_0)$.

(c) Pour une onde de la forme:

$u(z,t) = U_0\, e^{z/\ell_c}\, e^{j(\omega t - k'z)}$, le

nombre d'onde complexe est alors

$\underline{k} = k' + \frac{j}{\ell_c}$ avec $k' > 0$ ($z \nearrow$)

La relation de dispersion s'écrit toujours

$$\underline{k}^2 = \Lambda\Gamma\omega^2 - \Lambda\chi j\omega \quad \text{soit avec } \chi = -\frac{1}{Ra}$$

et $\Lambda = \frac{L}{a}$, $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + j\frac{L}{R}\frac{1}{a^2}$

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{L}{R}\frac{c^2 j\omega}{a^2\omega^2}\right), \quad \text{or } \frac{Lc^2}{a^2} = \frac{1}{C}$$

et $\underline{\underline{k}^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\underline{1 +} \frac{j}{RC\omega}\right)$

Si $\underline{k} = k' + \frac{j}{\ell_c}$

$$\begin{cases} k'^2 - \frac{1}{\ell_c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \\ 2k'/\ell_c = \frac{\omega}{c^2}\cdot\frac{1}{RC} \end{cases}, \quad \ell_c > 0 \text{ puisque } k' > 0,$$

d'où le résultat.

(11) • LASER pour des applications ~~[illegible]~~.
• Répéteurs pour les fibres optiques.

(12) Si on utilise $\ell_c \gg \lambda = \frac{2\pi}{k'}$, $k'^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2}$,
soit $k' = +\omega/c$ $(k' > 0)$,
et $2\frac{\omega}{c\ell_c} = \frac{\omega}{c^2}\frac{1}{RC}$, d'où $\ell_c = 2cRC$

ou encore $\ell_c = 2\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}\frac{-1}{\chi a}\cdot a\Gamma = -2\sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}\frac{1}{\chi}$.



Or l'équation différentielle est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Lambda\Gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda\chi j\omega u$$

soit en remplaçant $\Lambda\chi$ par $-\frac{2}{\ell_c}\sqrt{\Gamma\Lambda}$,

$$\underline{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2}{c\ell_c}\frac{\partial u}{\partial t}}$$

(13) Si $u$ et $\vec{E}$ sont proportionnels, $\vec{E}$ vérifie $\underline{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{2}{c\ell_c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$.

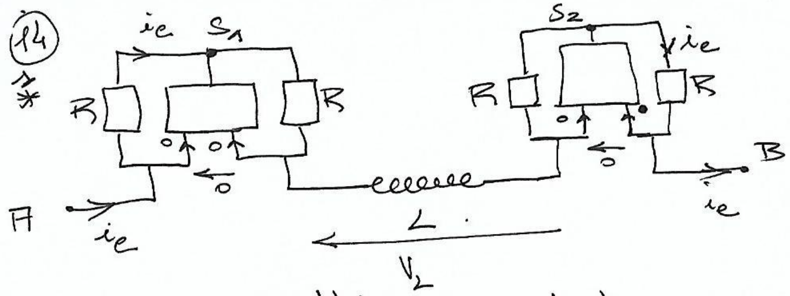
Si le milieu est non chargé, $\rho = 0$ donc $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ et $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. En prenant $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E})$ il vient

$$\underline{\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}}$$

En identifiant, en intégrant % au temps et en gardant seulement les solutions propagatives il vient $\underline{\vec{j} = -\frac{2}{\mu_0 c\ell_c}\vec{E}}$, relation constitutive du milieu, "<u>anti loi d'Ω locale</u>".

(14)

1*




→ $\underline{V_L} = \frac{jL\omega}{2R+jL\omega}(\underline{V_{S_1}} - \underline{V_{S_2}})$

→ $\underline{V_{S_1}} - \underline{V_A} = -Ri_e$ , $\underline{V_B} - \underline{V_{S_2}} = -Ri_e$

→ $\underline{U_L} = \underline{V_A} - \underline{V_B}$

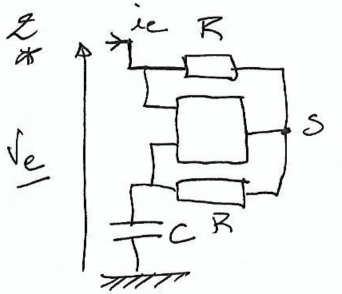
D'où $\underline{U_L} = \underline{V_A} - \underline{V_B} = \frac{jL\omega}{2R+jL\omega}\left[(\underline{V_A}-\underline{V_B}) - 2Ri_e\right]$

soit $\frac{2R}{2R+jL\omega}(\underline{V_A}-\underline{V_B}) = -\frac{2Ri_e\, jL\omega}{2R+jL\omega}$

et $\underline{V_A} - \underline{V_B} = -jL\omega\, i_e$.

l'ensemble est une inductance négative.

2*




• $\underline{V_e} - \underline{V_S} = Ri_e$ (1)

• $\underline{V_C} = \underline{V_e} = \frac{1}{jC\omega}\cdot\frac{1}{R+\frac{1}{jC\omega}}\underline{V_S}$

$\underline{V_e} = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{V_S}$ (2)

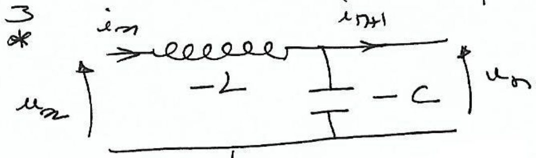
soit $\underline{V_e} - (1+jRC\omega)\underline{V_e} = Ri_e$

d'où $\underline{V_e} = -\frac{1}{jC\omega}i_e$.

(11)

l'ensemble est une capacité négative. (12)

3*




Les conditions de propagation sont les mêmes qu'en (7), car

on montre que :

$\frac{d^2u_n}{dt^2} = \frac{1}{LC}(u_{n-1}+u_{n+1}-2u_n)$

n'apparaît que le produit $(-L\times -C)$.

(15) Si on pose $\Lambda = \frac{L}{a}$ , $\Gamma = \frac{C}{a}$ et que l'on suppose $d \gg a$ on passe à l'approximation des milieux continus et avec

$\frac{(-L\times -C)}{a^2} = \Lambda\Gamma = \frac{1}{c^2}$. $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

(16) on avait en (6) :

$P_{EM_L} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}\, I_0^2$ ; en remplaçant Λ par −λ et Γ par −Γ on obtient la même expression de $P_{EML}$.

Par contre $w_{EM_L} = \frac{1}{2}\Lambda\langle i^2\rangle + \frac{1}{2}\Gamma\langle u^2\rangle$ devient (en changeant Λ et Γ en −Λ, −Γ)

$w_{EM_L} = -\Lambda I_0^2$

D'où $P_{EM2}/w_{EM2} = -\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = -c$ l'énergie se propage de droite à gauche...

(17) Immédiat puisque $\Lambda = \mu_0$ et $\Gamma = \varepsilon_0$...

(18) La vitesse de phase est toujours $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$ puisque $-\Lambda\times -\Gamma = \Lambda\Gamma$... D'où le résultat!