

I. Propagation et réflexion d'ondes dans un câble coaxial (CCP 2011)

Les câbles coaxiaux sont utilisés comme moyen de transmission d'informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour les interconnexions dans les réseaux informatiques.

Un signal qui se propage dans un câble coaxial peut subir plusieurs modifications. Il peut être déformé (milieu dispersif), atténué (milieu dissipatif). Il peut aussi subir des réflexions au niveau des connexions.

Ce sujet aborde la modélisation du câble coaxial et les phénomènes de réflexion d'ondes lorsque le câble est connecté sur une charge.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs de même longueur ℓ , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du câble. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 , appelé la gaine du câble. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On donne : $R_1 = 0,25$ mm, $R_2 = 1,25$ mm, $\ell = 100$ m.

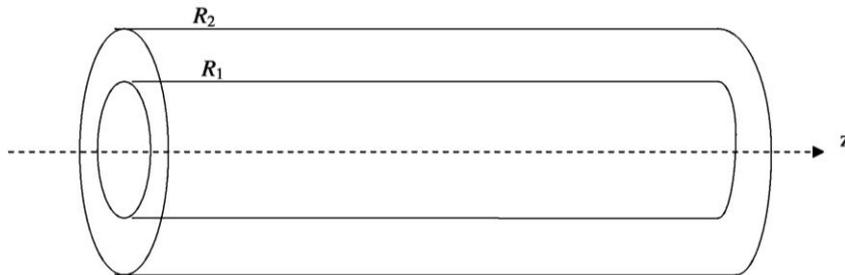


Figure 1 : Portion de câble

Propagation et réflexion des ondes dans le câble coaxial :

La gaine est reliée à la masse, et l'âme, portée au potentiel $V(z,t)$, est parcourue par un courant $i(z,t)$. On adopte le modèle bifilaire local de la portion de câble coaxial de longueur dz de la figure 2 où L et C désignent respectivement l'inductance linéique et la capacité linéique du câble coaxial.

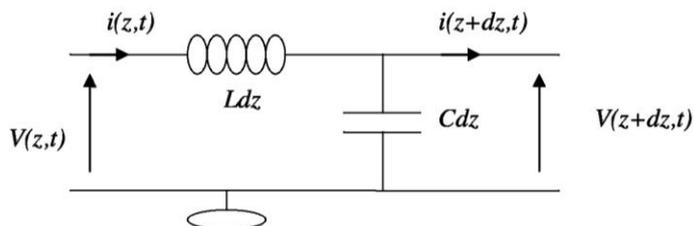


Figure 2 : Modèle bifilaire d'une portion de câble

- 1) A quelle(s) condition(s) sur les matériaux peut-on modéliser ainsi la portion de câble coaxial ?

Equation de propagation :

- 2) Explicitez le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fonctions $V(z,t)$ et $i(z,t)$.
- 3) En déduire les deux équations aux dérivées partielles, découplées, vérifiées par la fonction $V(z,t)$ d'une part, puis par la fonction $i(z,t)$ d'autre part. Quelle est la forme la plus générale de la fonction $V(z,t)$? On posera $C_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Phénomène de réflexion en bout de câble :

On s'intéresse au cas d'ondes sinusoïdales de pulsation ω .

On posera $V(z,t) = V_i(z,t) + V_r(z,t)$, avec $V_i(z,t) = V_{im} \cdot \cos(\omega t - kz + \varphi)$ et $V_r(z,t) = V_{rm} \cdot \cos(\omega t + kz + \psi)$.

A ces ondes réelles, on associe les ondes complexes $\underline{V}(z,t) = \underline{V}_i(z,t) + \underline{V}_r(z,t)$ avec :

$$\underline{V}_i(z,t) = \underline{V}_{im} \cdot e^{j(\omega t - kz)} \text{ et } \underline{V}_r(z,t) = \underline{V}_{rm} \cdot e^{j(\omega t + kz)} \text{ où } \underline{V}_{im} = V_{im} \cdot e^{j\varphi} \text{ et } \underline{V}_{rm} = V_{rm} \cdot e^{j\psi}.$$

Le câble est relié à un générateur basses fréquences, qui délivre en $z=0$ une tension sinusoïdale, de sorte que l'onde totale en $z = 0$ est sinusoïdale. Le choix de l'origine des temps nous permet de poser : $V(0,t) = V_o \cdot \cos(\omega t)$, à laquelle on associe la forme complexe $\underline{V}(0,t) = V_o \cdot e^{j\omega t}$.

- 4) Le câble est en court-circuit, ou refermé sur une résistance nulle ($R=0$) à l'extrémité située en $z=\ell$.

Expliciter la condition limite $\underline{V}(\ell, t)$ vérifiée par la fonction $\underline{V}(z,t)$ en $z=\ell$.

En déduire le système de deux équations à deux inconnues vérifié par \underline{V}_{im} et \underline{V}_{rm} .

Puis exprimer \underline{V}_{im} et \underline{V}_{rm} en fonction de V_o , k et ℓ .

- 5) On définit le coefficient de réflexion r par : $r = \frac{V_r(\ell, t)}{V_i(\ell, t)}$.

Déterminer r dans le cas du court-circuit ($R=0$).

- 6) Le câble est en circuit ouvert, ou refermé par une résistance infinie ($R = +\infty$) à son extrémité située en $z = \ell$.

Expliciter, très brièvement, sur une grandeur physique bien appropriée, la condition limite en $z = \ell$. On admettra dans ce cas que $r = 1$.

- 7) Le câble est maintenant chargé à son extrémité en $z = \ell$, par une résistance R . En admettant que le coefficient de réflexion r est réel, justifier qu'il existe au moins une valeur critique de R notée R_c pour laquelle il n'y a pas d'onde réfléchie. Comment qualifie-t-on ce fonctionnement ?

Dans la suite du problème, on admettra que $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Etude expérimentale :

Un générateur basses fréquences, branché à l'entrée du câble en $z = 0$, délivre, comme onde incidente, une tension périodique « carré », entre les niveaux 0 et V_0 . L'autre extrémité du câble est refermée sur une résistance R .

En plus des phénomènes de propagation et de réflexion éventuelle de l'onde, il y a un léger phénomène d'atténuation. On supposera que la valeur de la résistance R n'a aucune influence tant sur la durée de propagation que sur l'amortissement dû au chemin parcouru. On admet de plus qu'il n'y a pas de réflexions multiples.

A l'aide d'un oscilloscope, on observe en $z = 0$ la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur (figure 3) et de l'onde réfléchie. Les oscillogrammes de la figure 4 ont été réalisés pour différentes valeurs de R .

- 8) Donner la valeur typique de l'impédance interne du générateur basses fréquences que vous avez utilisé en travaux pratiques.

Cas d'un court-circuit : $R=0$.

L'extrémité $z=\ell$ est en court-circuit : $R=0$.

- 9) On schématise l'onde incidente, à l'entrée du câble en $z=0$, par la figure suivante :

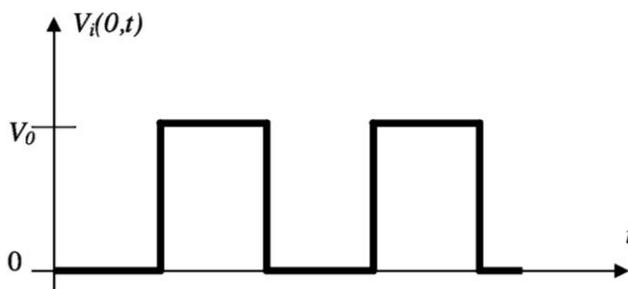


Figure 3 : Onde incidente

En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement et de propagation, et sachant que le retard dû à la propagation est inférieur à $T/4$, où T est la période de l'onde incidente, schématiser la forme des ondes réfléchie et totale notées $V_r(0,t)$ et $V_{\text{tot}}(0,t)$ au point $z = 0$.

- 10) En utilisant l'oscillogramme correspondant à $R=0$, déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble.
- 11) On définit le coefficient d'amortissement, noté K , au cours de la propagation globale, comme le rapport du module de l'amplitude de l'onde réfléchie une fois revenue en $z=0$ sur le module de l'amplitude de l'onde incidente émise en $z=0$. Déterminer une valeur approchée de K .

Cas général $R \neq 0$:

- 12) A partir des autres oscillogrammes de la figure 4, déterminer les valeurs des coefficients de réflexion pour les différentes valeurs de R , à savoir : 20Ω , 40Ω , 60Ω et 80Ω .

13) Pour quelle valeur particulière R_c de R , n'y a-t-il pas d'onde réfléchie ? Pourquoi n'y-a-t-il pas de réflexions multiples ?

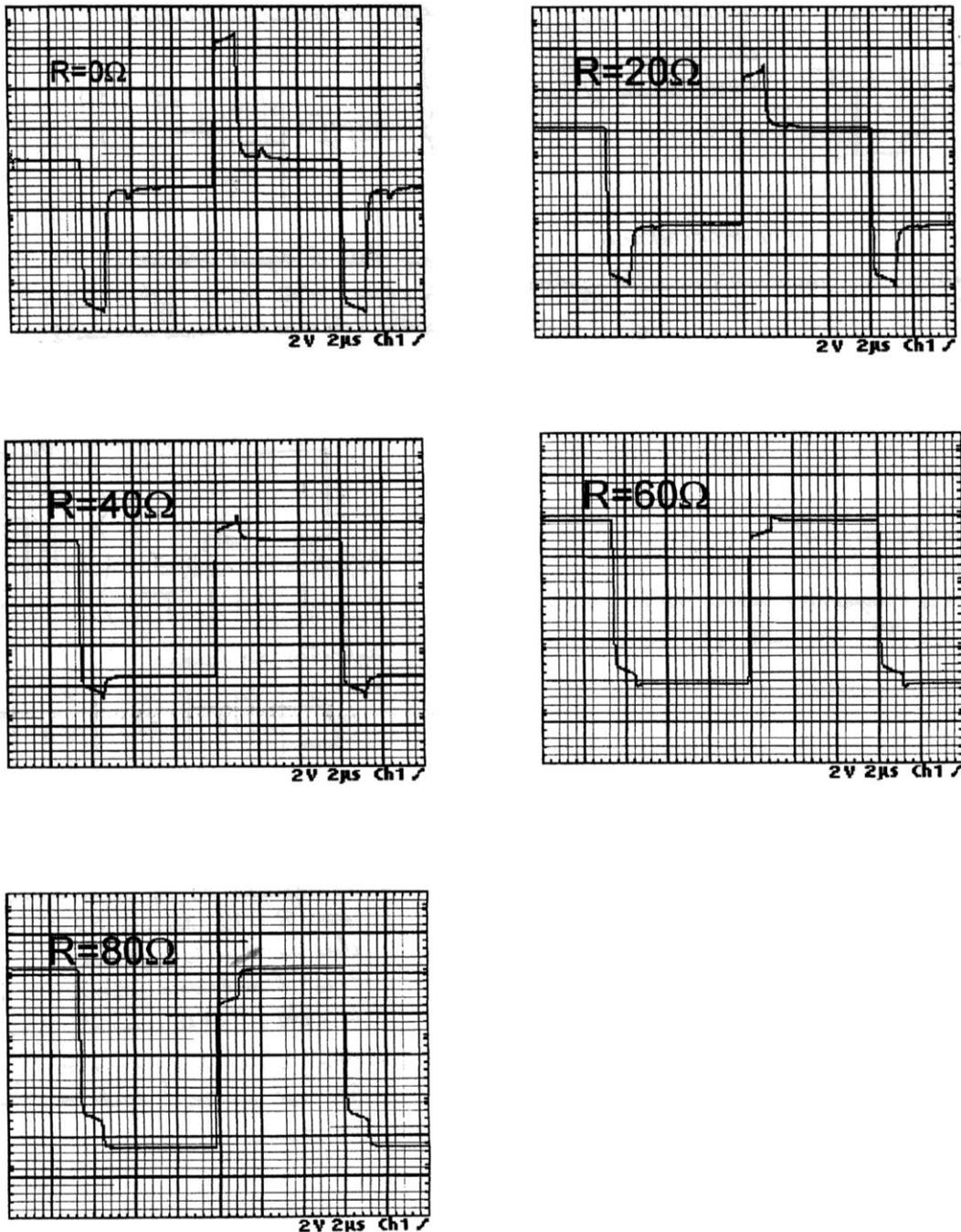


Figure 4 : Oscillogrammes

Constantes physiques

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H} \cdot \text{m}^{-1} \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{F} \cdot \text{m}^{-1} \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

II. CORDE VIBRANTE – INSTRUMENTS A CORDES

Ce problème s'intéresse à quelques aspects de la musique des instruments à cordes.

Dans tout le problème, on note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base des coordonnées cartésiennes. Les grandeurs complexes sont soulignées.

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L . Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

La corde sans raideur fait l'objet des parties A. à C. La dernière partie prend en compte l'influence de cette raideur.

A. Équation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0 . Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox) .

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x, t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t . L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.

On fait les hypothèses suivantes :

- (1) Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox , ce qui entraîne : $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$.
- (2) La tension de la corde en mouvement est : $T(x, t) = T_0 + T_1(x, t)$ avec $|T_1(x, t)| \ll T_0$ et $\frac{|T_1(x, t)|}{T_0}$ infiniment petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$.
- (3) On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x, t)$ et en ses dérivées.

(4) On néglige les effets de la pesanteur.

1. a) On considère l'élément de corde de longueur $d\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x + dx$.

Montrer que :

$$d\ell \simeq dx$$

au premier ordre en $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|$.

b) Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde et le projeter sur \vec{e}_y . En déduire que l'ébranlement $y(x, t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

où c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ .

2. a) Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour c .

b) Donner sans démonstration la forme générale des solutions de l'équation (1).

c) Calculer c pour :

- une corde de guitare : masse linéique $\mu = 3 \text{ g.m}^{-1}$, tension $T_0 = 103 \text{ N}$;
- une corde de piano : masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$, tension $T_0 = 850 \text{ N}$, diamètre $\phi = 1,2 \text{ mm}$.

Commenter les valeurs obtenues.

B. Corde fixée à ses deux extrémités, modes propres

La corde est fixée à ses deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, ce qui impose les conditions aux limites : $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

1. Modes propres, fréquences propres

a) Qu'appelle-t-on *onde stationnaire* ?

b) Montrer que les solutions en ondes stationnaires, physiquement acceptables, de l'équation (1) sont de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

Quelle est la relation entre ω et k ?

c) Définir les *modes propres* et les *fréquences propres* de la corde.

d) Montrer que les fréquences propres de la corde sont :

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

e) Définir les *ventres* et les *nœuds* de vibration. Quelle est la distance entre deux ventres consécutifs ? entre deux nœuds consécutifs ? entre un ventre et un nœud consécutifs ?

f) Dessiner l'aspect de la corde à différents instants bien choisis pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

g) Proposer une expérience permettant de mesurer les fréquences propres d'une corde

de guitare ou de piano.

La description d'une expérience doit comporter un schéma explicatif et le protocole expérimental.

h) On considère les cordes dont on a donné les caractéristiques à la question A.2c.

La corde de guitare permet de jouer une note de fréquence fondamentale (la plus basse des fréquences propres de la corde) 147 Hz (pour les musiciens, cette note est un ré₂). Quelle est sa longueur ? Quelle est la longueur de la corde de piano jouant la même note ?

2. Solution générale

On admet que la solution générale de l'équation (1) correspondant aux conditions aux limites $y(0, t) = y(L, t) = 0$ est une superposition des modes propres. On l'écrit sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2)$$

Les conditions initiales sont constituées par la donnée de :

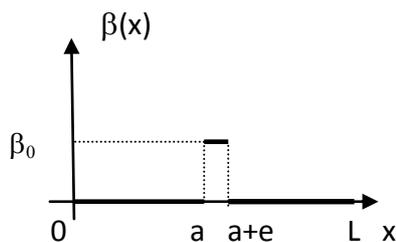
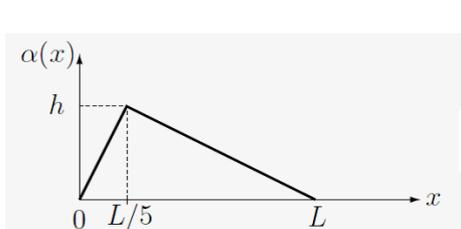
• la forme de la corde : $y(x, 0) = \alpha(x)$,

• sa vitesse : $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x)$,

où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont des fonctions définies sur $[0, L]$.

On s'intéresse aux fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$ définies sur \mathbb{R} tout entier, impaires, périodiques de période $2L$ et qui coïncident avec $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$.

a. On donne les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ suivantes :



• L'une des fonctions correspond à une corde frappée, l'autre à une corde pincée : indiquer laquelle est laquelle.

• Illustrer graphiquement la construction de $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$.

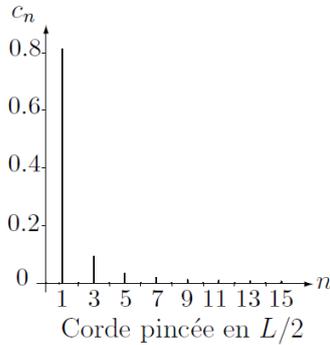
- b. Expliquer comment les coefficients a_n et b_n peuvent être calculés à partir des fonctions $\tilde{\alpha}(x)$ et $\tilde{\beta}(x)$; **les calculs ne sont pas demandés.**

3. Corde pincée

Une corde de longueur L est pincée puis lâchée sans vitesse à l'instant $t = 0$ (corde de guitare ou de clavecin par exemple).

Que valent les coefficients b_n ?

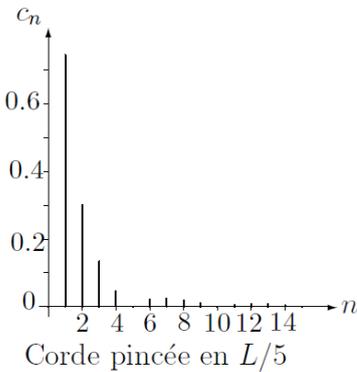
On donne le spectre pour une corde pincée à la moitié de sa longueur :



Calculer les rapports c_3/c_1 et c_5/c_1 et montrer qu'ils sont bien en accord avec forme de la fonction $\tilde{\alpha}(x)$ correspondante.

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

On donne ensuite le spectre pour une corde pincée au $1/5^{\text{ème}}$ de sa longueur :



Comparer qualitativement les deux spectres.

Quelle est le son le plus riche ? On pourra prendre pour fixer les idées la fréquence fondamentale $f = 147$ Hz du B.1.h.

4. Corde frappée

Une corde de piano est frappée par un petit marteau à la distance $x_0 = sL$ de son extrémité $x = 0$.

a) Que valent les coefficients a_n ?

b) On peut montrer que les coefficients a_n associés à la corde pincée étudiée à la question B.3 décroissent globalement comme $\frac{1}{n^2}$. En revanche les amplitudes des différents harmoniques de la corde frappée décroissent plutôt en $\frac{1}{n}$ (au moins à partir d'une certaine valeur de n).

Comparer alors les sons d'un clavecin (instrument à corde pincées) et d'un piano (instrument à corde frappées).

5. Quel(s) phénomène(s) essentiel(s) ont été oubliés dans ce modèle d'instruments à cordes.

C. Étude énergétique

1. a) Exprimer la densité linéique d'énergie cinétique e_C de la corde en mouvement en fonction de μ et de $\frac{\partial y}{\partial t}$.

b) On étudie la portion de corde située entre les abscisses x et $x + dx$. Dans cette question, il est conseillé de travailler avec les variables $T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial y}{\partial t}$.

Les deux questions ii) et iii) sont très délicates ; mais on pourra traiter 2) en utilisant le résultat de 1)a) et celui de 1)b)iii).

- i) Exprimer la puissance des forces extérieures à ce système.
- ii) En appliquant le théorème de la puissance cinétique à ce système, exprimer la puissance des forces intérieures.
- iii) En déduire que l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_P(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

en prenant l'énergie potentielle nulle quand la corde est au repos.

2. a) On étudie la corde dans le mode propre n . L'ébranlement est écrit sous la forme :

$$y_n(x, t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie totale de la corde dans ce mode n s'écrit :

$$E_n = n^2 c_n^2 \frac{\pi^2}{4L} T_0$$

- b) On considère maintenant la solution générale sous la forme :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Montrer que l'énergie E de la corde est :

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Commenter.

3. On a vu précédemment que les amplitudes des différents harmoniques d'une corde pincée sont de la forme $c_n = \frac{c_1}{n^2}$ alors que ceux d'une corde frappée sont de la forme : $c'_n = \frac{c'_1}{n}$. Comparer les énergies des différents modes d'une corde de clavecin (corde pincée) et d'une corde de piano (corde frappée). Commenter.

D. Prise en compte de la raideur de la corde

Attention les questions 2.b, c et d sont particulièrement difficiles

Dans cette question, on suppose que la corde est cylindrique de rayon a et qu'elle est faite en acier, de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 190 \cdot 10^9 \text{ U.S.I.}$. La pesanteur n'est pas prise en compte et les déformations sont de nouveau considérées comme petites.

1. Rappeler la définition du module d'Young et préciser son unité.
2. On considère une déformation de cette corde dans le plan xOy comme précédemment. La théorie de l'élasticité montre que la tension \vec{T} n'est plus tangente à la corde et que, pour permettre la courbure de la corde, il faut un couple de moment $\vec{\Gamma} = \pm \Gamma_z(x, t) \vec{e}_z$ qui s'exprime, dans le cadre de notre étude, par :

$$\Gamma_z(x, t) = ESK^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4)$$

où S la section de la corde et K un coefficient dépendant de la forme de la section droite de la corde, égal à $K = \frac{a}{2}$ pour une corde cylindrique.

La portion de corde comprise entre les points d'abscisse x et $x + dx$ est donc soumise aux deux tensions :

$$\vec{T}_g(x, t) = -(T_x(x, t)\vec{e}_x + T_y(x, t)\vec{e}_y) \quad \text{en } x$$

et :

$$\vec{T}_d(x + dx, t) = T_x(x + dx, t)\vec{e}_x + T_y(x + dx, t)\vec{e}_y \quad \text{en } x + dx$$

et aux deux couples :

$$-\Gamma_z(x, t)\vec{e}_z \quad \text{en } x$$

et :

$$\Gamma_z(x + dx, t)\vec{e}_z \quad \text{en } x + dx$$

dont le moment est donné par l'expression (4).

a) Vérifier l'homogénéité de l'expression (4).

b) En appliquant le théorème de la résultante cinétique à la tranche $\{x, x + dx\}$, montrer que T_x ne dépend que du temps.

On supposera que T_x est constante et on la prendra égale à T_0 .

Établir une relation différentielle entre T_y et y .

c) En appliquant le théorème du moment cinétique au centre de masse de la tranche $\{x, x + dx\}$, établir une nouvelle relation différentielle entre T_y , Γ_z et y . On justifiera le fait que le moment d'inertie de ce système est d'ordre 3 en dx donc négligeable à l'ordre d'approximation envisagé.

d) En déduire l'équation de propagation :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ES K^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

On pourra utiliser directement ce dernier résultat dans la suite sans l'avoir démontré.

3. Modification des fréquences propres

a) En supposant que la déformation est harmonique, donc de la forme :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \varphi)$$

donner la relation entre ω et k .

b) i) Montrer que les fréquences propres

de la corde tendue entre $x = 0$ et $x = L$ se mettent sous la forme :

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2}$$

où c est la célérité des ondes dans la corde sans raideur et B une constante à exprimer en fonction de E , S , K , T_0 et L .

ii) Tracer, sur le même graphique, les courbes représentant f_n en fonction de n pour une corde sans raideur puis pour une corde avec raideur.

iii) Pour une corde de piano étudiée plus haut, on donne : $B = 4 \cdot 10^{-4}$. À partir de quelle valeur de n la fréquence propre de la corde avec raideur est-elle plus aiguë d'un demi-ton que celle de la corde idéale ? On rappelle que la gamme tempérée divise l'octave en 12 intervalles, appelés *demi-tons*, et que les fréquences successives f_p des notes espacées par ces demi-tons forment une suite géométrique vérifiant la loi générale $f_p = 2^{p/12} f$ où $p \in [1, 12]$ (p entier).