

Partie I : Mesures de champ magnétique - Mines PSI
2016 extrait

Dans ce problème sont abordées quelques méthodes de mesure de champs magnétiques, permanents ou éventuellement lentement variables dans le temps. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{B} pour le champ magnétique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{u} tel que $\|\hat{u}\| = 1$. Le référentiel terrestre sera considéré comme galiléen. On rappelle que $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

III. — Utilisation d'une sonde à effet Hall

L'élément principal d'une sonde à effet Hall est une plaquette constituée d'un semi-conducteur, dopé N, dans laquelle les porteurs de charges libres sont des électrons, dont la charge est $q = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

La densité volumique de ces électrons dans cette plaquette est $n = 3,30 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$.

Cette plaquette possède la forme d'un parallélépipède, dont les six faces sont numérotées conformément à la figure 4, ses dimensions sont $a = 3 \text{ mm}$, $b = 6 \text{ mm}$ et $c = 0,2 \text{ mm}$. Les faces 1 et 3 sont reliées aux bornes d'une source de courant idéale, délivrant un courant d'intensité $I_0 = 10 \text{ mA}$ constante. En régime permanent, on peut considérer que les lignes de courant sont rectilignes et parallèles, le vecteur densité volumique de courant est uniforme et s'écrit $\vec{j} = j \hat{u}_x$.

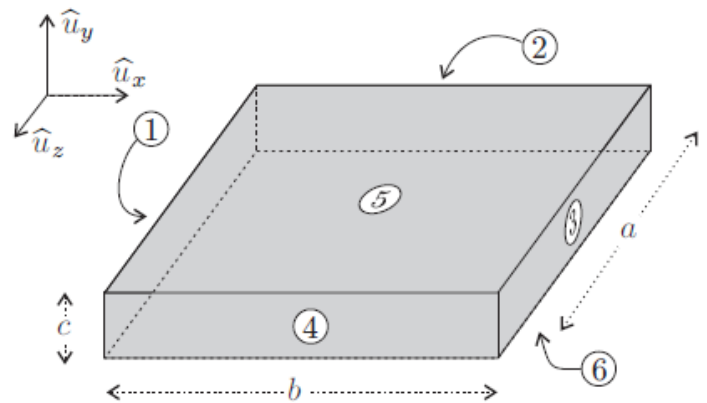


FIGURE 4 – Plaquette de semi-conducteur

□ 11 — Établir l'expression de la vitesse \vec{v} des porteurs de charge et calculer sa norme.

La plaquette est placée dans une zone de l'espace où règne un champ magnétique considéré comme constant, tel que $\vec{B} = B \hat{u}_y$ avec $B > 0$.

□ 12 — Après avoir exprimé la force magnétique s'exerçant sur une charge mobile, justifier que des densités surfaciques de charge apparaissent sur les faces 2 et 4. On précisera les signes de ces densités.

Ces densités surfaciques de charges créent un champ électrique $\vec{E}_h = E_h \hat{u}_z$ au sein de la plaquette. En régime permanent, la vitesse des porteurs de charge reste inchangée.

□ 13 — En appliquant le principe fondamental de la mécanique à un porteur de charge en projection sur \hat{u}_z , déterminer l'expression de E_h . Montrer qu'il apparaît une différence de potentiel $u_h = V_4 - V_2$ entre les faces 4 et 2. Celle-ci est appelée tension de Hall, on l'écrira sous la forme $u_h = \gamma B$ en précisant l'expression et la valeur numérique de la constante γ .

La création de la source de courant nécessite un circuit électronique de commande. Les tensions de Hall étant souvent très faibles, on doit les amplifier à l'aide d'un circuit électronique de mesure. Le circuit de commande comprend un circuit intégré, nommé régulateur de tension, ayant trois broches, notées : e (entrée), s (sortie) et c (commun). La tension $u = V_s - V_c$ est constante et sa valeur est fixée à $u = 5\text{ V}$. La tension d'alimentation est $V_{cc} = 9\text{ V}$. L'intensité I_c du courant entrant en c , est contrôlée à la valeur $I_c = 10\text{ nA}$. Le dipôle AM ainsi réalisé est représenté sur la figure 5.

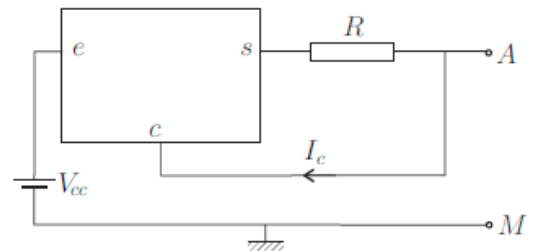


FIGURE 5 – Source de courant idéale

□ 14 — Pour quelle valeur de la résistance R le dipôle AM se comporte-t-il comme une source de courant idéale, délivrant un courant $I_0 = 10\text{ mA}$?

Le premier amplificateur de mesure que l'on pourrait envisager pourrait être constitué d'un amplificateur linéaire intégré (ALI) idéal utilisé en montage non inverseur conformément à la figure 6. L'entrée e_+ est reliée à la face 4, la masse M est reliée à la face 2.

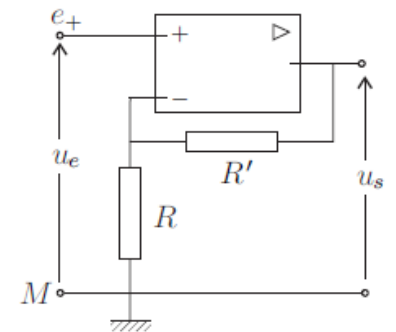


FIGURE 6 – Montage non inverseur

□ 15 — Montrer que l'utilisation du montage de la figure 6 associé à celui de la figure 5 peut poser des problèmes de référence de potentiel.

On modifie le circuit de mesure en utilisant un amplificateur différentiel représenté sur la figure 7, qui utilise un ALI, supposé idéal et en fonctionnement linéaire. Les courants sur les deux entrées sont nuls et ses deux entrées sont au même potentiel.

□ 16 — Montrer que le problème rencontré à la question 15 est résolu par l'utilisation d'un amplificateur différentiel. Établir la relation entre u_s et $u_h = V_4 - V_2$. A quelle condition sur R_2 et R_1 la tension de Hall est elle amplifiée ?

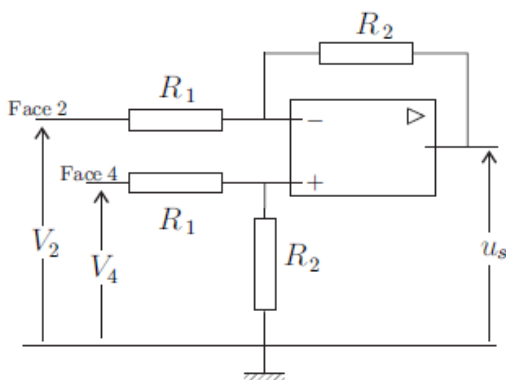


FIGURE 7 – Amplificateur différentiel

□ 17 — Établir l'expression de la résistance d'entrée sur la face 4. Quel problème pose le résultat obtenu ?

Afin de pallier ce problème, on utilise le montage de la figure 6 dans un cas limite.

□ 18 — Établir l'expression de la résistance d'entrée et du gain en tension $A = \frac{u_s}{u_e}$ pour le montage de la figure 6.

□ 19 --- Montrer que le montage de la figure 6 permet de résoudre le problème soulevé à la question 17. Comment peut-on obtenir simplement $A = 1$ avec un des montages vus en cours qui possède la même résistance d'entrée ?

Comment s'appelle ce montage ? Quelles valeurs limites doivent prendre R et R' pour l'obtenir à partir du montage de la figure 6 ?

□ 20 — Représenter le montage *complet* incluant la plaquette semi-conductrice et l'électronique qui permet la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre. On placera cette composante sur la figure qui utilisera entre autres 5 résistances et 3 ALI.

□ 21 — On choisit $R_1 = 100 \Omega$ et $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$. On obtient alors $u_s = 20,0 \text{ mV}$, quelle est la valeur de cette composante ?

La question 22 qui suit ne fait pas partie du DS mais vous trouverez sa réponse dans le corrigé.

On veut maintenant vérifier l'influence du champ magnétique propre \vec{B}_0 créé par le courant I_0 . Pour cela on adopte un modèle simplifié dans lequel la plaquette est supposée infiniment longue dans les directions \hat{u}_x et \hat{u}_z uniquement. Le semi-conducteur est supposé avoir la même perméabilité μ_0 que le vide.

□ 22 — Déterminer, dans ce modèle, la direction de \vec{B}_0 ainsi que les variables spatiales du problème dont ce champ ne dépend pas. A l'intérieur de la plaquette où la variable $y \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$, écrire la ou les équations différentielles dont les composantes de \vec{B}_0 sont solutions. En déduire l'expression de \vec{B}_0 . Calculer la valeur maximale de la norme de ce champ. Dans la mesure du champ terrestre, pouvait-on négliger l'influence de \vec{B}_0 ?

IV. — Utilisation d'une magnétorésistance

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe Oz , de hauteur h , délimitée par un cylindre intérieur de rayon r_1 et par un cylindre extérieur de rayon r_2 . À l'aide d'une source de tension on impose les potentiels $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$. On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute. L'existence de deux équipotentielles cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de r , ainsi

$$V = V(r), \quad \Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) \quad \text{et} \quad \vec{\text{grad}}V(r) = \frac{dV}{dr} \hat{u}_r.$$

□ 23 — Le conducteur est localement non chargé, vérifier que l'hypothèse $V = V(r)$ est la seule possible. Déterminer le potentiel électrique en un point M de ce conducteur. En déduire l'intensité E du champ électrique \vec{E} en ce même point en fonction de V_1, V_2, r_1, r_2 et r .

La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B \hat{u}_z$ avec $B > 0$. Le conducteur contient n électrons libres par m^3 . On considère de plus le modèle de Drude dans lequel chaque électron de vitesse \vec{v} est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement s'exprimant sous la forme $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ avec $\lambda > 0$.

□ 24 — Pour chaque électron, établir, en régime permanent, la relation entre \vec{v} , \vec{B} et \vec{E} paramétrée par λ et la charge élémentaire e . En déduire l'expression, dans la base cylindrique $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z)$, des coordonnées de \vec{v} en fonction de e, λ, E et B puis celles du vecteur densité volumique de courant \vec{j} .

□ 25 — Exprimer l'intensité du courant électrique traversant une surface équipotentielle de rayon r . En déduire la résistance électrique R de la couronne, en fonction de e, n, λ, B, h, r_1 et r_2 . On note R_0 la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif $\varepsilon = \frac{R-R_0}{R_0}$ en fonction de e, B et λ . Calculer la valeur numérique de R_0 ainsi que celle de ε pour $B = 1,0 \text{ mT}$, $r_1 = 1,0 \text{ mm}$, $r_2 = 3,0 \text{ mm}$, $h = 1,0 \text{ mm}$, $n = 1,1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $\lambda = 1,8 \times 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Commenter l'utilisation du phénomène pour la mesure de champs magnétiques.

PARTIE II : Description électrostatique des fibres nerveuses.

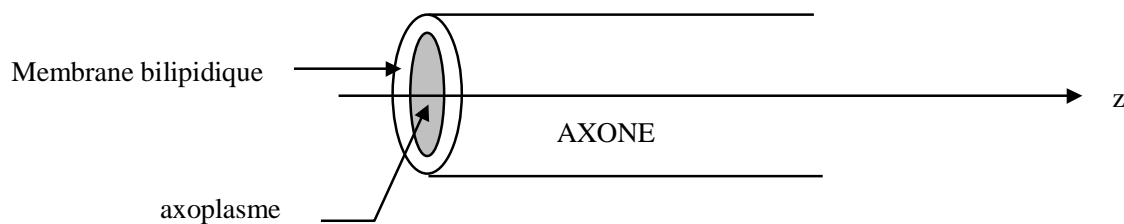
Données numériques :

- Constante de BOLTZMANN $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.
- Permittivité électrique du vide $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.
- Température moyenne interne du corps humain $\theta = 37 \text{ }^\circ\text{C}$.

Rappels :

- Capacité d'un condensateur : $C = \frac{Q}{V}$.
- Energie, E , associée à une charge q de potentiel V : $E = qV$.
- Pour une population de particules à l'équilibre thermique pouvant avoir une énergie E_1 ou E_2 , la loi de BOLTZMANN donne le nombre de particules d'énergie E_i : $N_i = A \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$, où A est une constante de normalisation.

Les cellules nerveuses (neurones) présentent toutes, quelque soit l'animal, deux extrémités : le corps cellulaire et le bouton synaptique et entre les deux une fibre appelée axone de très grande longueur (variant de quelques dixièmes de cm à quelques dm). Cet axone baigne dans un milieu extérieur formé de liquide interstitiel. L'axone comprend un axoplasme et une membrane bilipidique ; pour simplifier on supposera sa géométrie cylindrique :



Les caractéristiques expérimentales des fibres nerveuses sont données ci-dessous :

Rayon extérieur de l'axone	a	$5 \mu\text{m}$
Epaisseur de la membrane	b	7.0 nm
Permittivité relative (membrane)	ϵ_r	8
Résistivité (membrane)	ρ_m	$1.6 \cdot 10^7 \Omega.\text{m}$
Résistivité (axoplasme)	ρ_a	$0.5 \Omega.\text{m}$
Capacité/unité de surface (membrane)	c_m	0.01 F.m^{-2}
Conductance/unité de surface (membrane)	g_m	9 S.m^{-2}
Résistance/unité de longueur	r_a	$6 \cdot 10^9 \Omega.\text{m}^{-1}$

1. On choisira des coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe z correspondant à l'axe de symétrie de l'axone.

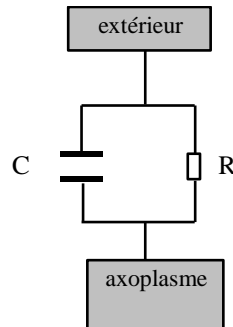
On admet qu'il existe une différence de potentiel uniforme et constante entre l'axoplasme (V_a) et le liquide interstitiel (V_{ext}). On suppose que la paroi interne de la membrane porte une densité superficielle de charge uniforme égale à σ (positive ou négative).

Les calculs de champ dans un milieu de permittivité relative ϵ_r sont identiques à ceux effectués dans le vide à condition de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_r \epsilon_0$ (le milieu est linéaire homogène et isotrope).

- Calculer le champ électrique qui règne dans la membrane en fonction de σ , ϵ_r , ϵ_0 , a , b et r . On détaillera soigneusement les étapes d'application du théorème de Gauss.
- Déterminer σ en fonction de ϵ_r , ϵ_0 , a , b , V_a et V_{ext} . En déduire la charge portée sur une longueur L .
- Simplifier les expressions de σ , et Q en tenant compte des valeurs du tableau et montrer que :

$$\sigma \approx \epsilon_r \epsilon_0 \frac{V_a - V_{\text{ext}}}{b}. \quad Q \approx \epsilon_r \epsilon_0 (V_a - V_{\text{ext}}) \frac{2\pi \lambda a L}{b}.$$

- d. Déterminer alors c_m ; faire l'application numérique ; conclure en comparant à la valeur du tableau.
- e. Sachant que $V_a - V_{\text{ext}} = -70 \text{ mV}$, donner le signe de σ et préciser sa valeur numérique. Quelle est l'intensité du champ existant dans la membrane ? Commenter cette valeur.
2. La membrane est un milieu légèrement conducteur de résistivité ρ_m .
- a. La résistance de fuite de cette membrane, R_f est définie par $V_a - V_{\text{ext}} = -R_f I$, où I est l'intensité circulant radialement dans la membrane. Calculer R_f pour une longueur L d'axone.
- b. En déduire que la conductance surfacique de la membrane s'écrit $\frac{1}{b\rho_m}$.
Faire l'application numérique ; conclure en comparant à la valeur du tableau.
3. On modélise alors la membrane par le circuit suivant :



- a. Justifier ce schéma.
- b. Quelle est la constante de temps τ de ce circuit ? L'exprimer en fonction de c_m et g_m .
- c. Que représente-t-elle physiquement ? Faire l'application numérique.
- d. En régime stationnaire la différence de potentiel existe en permanence. Justifier alors qu'il est indispensable qu'un mécanisme de renouvellement des charges soit mis en œuvre.
4. On considère maintenant l'axoplasme.
- a. Calculer la résistance longitudinale de l'axoplasme sur une longueur L d'axone.
- b. Calculer numériquement la résistance par unité de longueur de l'axoplasme.
5. On définit la longueur critique, l_c , comme la longueur de l'axone telle que la résistance longitudinale de l'axoplasme soit égale à celle (de fuite) de la membrane.
- a. Exprimer la longueur critique en fonction de ρ_m , ρ_a , a et b .
- b. Faire l'application numérique (on utilisera les données du tableau).
- c. Pour certaines fibres entourées de myéline la résistance de la membrane est multipliée par un facteur 300 ; que devient cette longueur critique.
- d. Conclure alors sur l'impossibilité de transmettre un signal électrique par simple conduction dans l'axoplasme. On indique que les fibres myélinisées sont les plus longues (quelques cm à 1 m) et les fibres amyéliniques les plus courtes.
6. Pour exprimer la présence permanente de charges de part et d'autre de la membrane, on effectue des mesures complémentaires. On considère le liquide de part et d'autre de la membrane de l'axone. Pour une fibre au repos on observe des différences de concentration entre l'extérieur et l'intérieur, ces mesures sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Ion	Concentration dans l'axoplasme ($C_a \text{ mmol.L}^{-1}$)	Concentration à l'extérieur ($C_{\text{ext}} \text{ mmol.L}^{-1}$)
Na^+	15	150
K^+	150	5.5
Cl^-	9	125

- a. Quels sont les deux phénomènes pouvant expliquer le passage des ions à travers la membrane ? Préciser, dans un tableau, pour chaque ion et pour chaque phénomène, dans quel sens on peut prévoir ce transfert.
- b. Montrer que la mesure de la concentration en ions chlorures de part et d'autre de la membrane s'explique bien grâce à la loi de Boltzmann. Qu'en est-il pour les deux autres ions ?

Ceci montre qu'il existe un dispositif pour maintenir l'état de non-équilibre, appelé pompe Na-K, dont le mécanisme ne sera pas étudié ici.

Fin de la partie physique