PSI* 2015 – 2016

DS N°2 PARTIE PHYSIQUE 2

Ecole polytechnique (Extrait)

Anneau de stockage pour molécules polaires

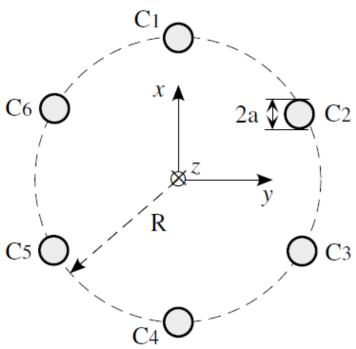
Le problème analyse le principe du piégeage dans une région restreinte de l'espace de molécules CH_3F qui possèdent un moment dipolaire électrique, en utilisant l'interaction avec un champ électrostatique inhomogène. De tels pièges permettent l'étude des collisions moléculaires ainsi que la construction de faisceaux moléculaires utilisés en nanolithographie et pour la réalisation de dépôts de surface.

Données numériques :

Constante de Boltzmann :	$k_B = 1,38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Unité atomique de masse :	$1\,u = 1,66 \times 10^{-27}$ kg
Masse de CH_3F :	$m = 34\,u$
Permittivité du vide :	$\varepsilon_0 \simeq 8,85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$

I. Hexapôle électrostatique

On étudie la possibilité de guider le mouvement de molécules polaires avec un système électrostatique formé de six électrodes cylindriques et parallèles $\{Ci,\ i = 1, 2, \dots 6\}$ disposées aux sommets d'un hexagone régulier auquel elles sont orthogonales (figure 1).



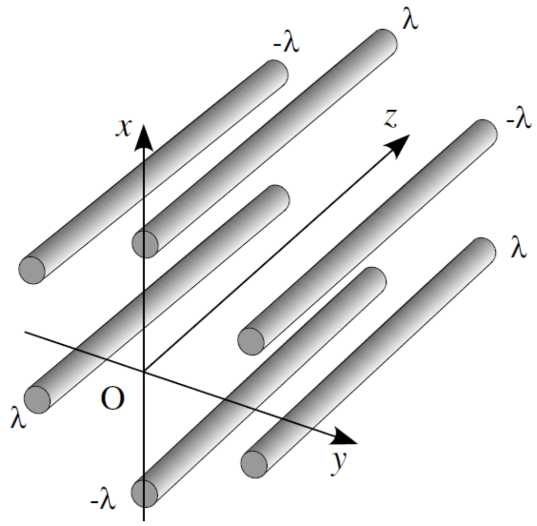


Figure 1

Leur rayon a est très inférieur au côté R de l'hexagone, $a \ll R$. Elles portent des densités linéiques de charge égales alternativement à $\lambda (\lambda > 0)$ pour les électrodes impaires et $-\lambda$ pour les paires ; on considèrera que ces charges sont fixes et uniformément réparties à leur surface. On négligera les effets d'extrémités, l'ensemble pouvant être considéré comme invariant par translation selon l'axe central Oz du système. On utilisera un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec comme repère orthonormé $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. Analyse des symétries

a) Quelles conclusions sur le champ $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V tire-t-on de l'invariance par translation du système ?

b) Considérer la symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe. Quelle propriété du champ électrique $\vec{E}$ en déduit-on ?

c) Même question pour l'un des trois plans passant par l'axe central et les axes de deux électrodes opposées.

d) Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.

e) Quelle est la période angulaire d'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz ? En déduire une expression générale du potentiel $V(r, \theta, z)$ sous forme d'une série de Fourier.

2. Soit une électrode de densité linéique de charge λ. Déterminer le champ électrostatique créé par cette électrode en un point P à l'aide de la distance D de ce point à son axe ($D > a$). En déduire une expression du potentiel électrostatique correspondant.

3. On considère maintenant l'ensemble des électrodes du système. Montrer que, en le choisissant nul sur l'axe central, le potentiel électrostatique en un point P est donné par l'expression :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5}\right)$$

où D_i désigne la distance de P à l'axe de l'électrode Ci.

4. Pour expliciter le potentiel en fonction des coordonnées de P, il est commode de considérer le plan xOy comme plan de représentation des nombres complexes. Le point P y est repéré par $\underline{Z} = x + iy = r\exp(i\theta)$, les axes des électrodes impaires le sont par (R, jR, j^2R) et ceux des électrodes paires par $(-R, -jR, -j^2R)$, avec $j = \exp(i2\pi/3)$ racine cubique de l'unité. Montrer que :

$$\frac{D_2 D_4 D_6}{D_1 D_3 D_5} = \left|\frac{R^3 + \underline{Z}^3}{R^3 - \underline{Z}^3}\right| .$$

5. On s'intéresse à la partie centrale $r \ll R$. Montrer que le potentiel électrostatique y est donné par $V(r, \theta, z) \simeq \dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \cos(3\theta)$. Cette expression respecte-t-elle les symétries étudiées en question **1.** ?

6. Déterminer les potentiels V_0 des électrodes impaires dans l'hypothèse $a \ll R$ en fonction de R, a et λ. Quel est celui des électrodes paires ?

7. On considère le système comme un condensateur, les trois électrodes impaires formant l'une des armatures, les trois paires l'autre. Déterminer la capacité par unité de longueur correspondante C.

Montrer que le potentiel électrostatique dans la partie centrale de l'hexapôle s'exprime simplement en fonction de cette capacité linéique et de la tension V_0.

8. *Application numérique.* Calculer la capacité électrostatique par unité de longueur d'un hexapôle ayant $R = 2.5$ cm et $a = 2.5$ mm.

II. Mouvement de molécules polaires dans un hexapôle électrostatique

Dans cette partie, on analyse le mouvement de molécules, possédant un moment dipolaire permanent $\vec{d}$, dans le champ électrique de l'hexapôle électrostatique étudié en partie I. Dans le vide, les molécules, libres de tourner, ont un mouvement de rotation ; l'énergie et le moment cinétique correspondant sont quantifiés. Seul compte, pour le couplage avec le champ électrique, la projection $d_{\text{eff}} = \vec{d}\,.\,\vec{E}/|\vec{E}|$ du moment dipolaire sur la direction du champ électrique ; d_{eff} est une constante positive, négative ou nulle, donnée pour chaque état moléculaire.

On rappelle qu'un dipôle est un doublet de charges +q et –q, placées respectivement en N et P et dont le moment dipolaire vaut $\vec{d}$ = q$\overrightarrow{NP}$. L'énergie potentielle d'interaction d'un dipôle avec un champ électrique vaut $\mathcal{E}_P = -\,\vec{d}.\vec{E}$.

1. Ecrire $\mathcal{E}_P$ à l'aide de d_{eff}.

2. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(r,\theta,z)$ en coordonnées polaires dans la partie centrale de l'hexapôle. Expliciter l'expression de l'énergie potentielle puis celle de la force exercée par l'hexapôle électrostatique sur une molécule en fonction de son moment dipolaire effectif d_{eff}.

3. Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement d'une molécule de masse m dans le champ hexapolaire s'écrit sous la forme $m\ddot{\vec{r}} = -K\vec{r}$, où $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et K est une constante à déterminer.

À quelle condition sur le signe de d_{eff} le mouvement est-il périodique ? Quelle est alors la fréquence f_0 correspondante ? Quel est le mouvement des molécules ayant d_{eff} de signe contraire ?

4. Résoudre cette équation différentielle pour un mouvement périodique d'une molécule située à l'instant $t = 0$ sur l'axe central et ayant une vitesse $\vec{v}(t=0) = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y + v_{0z}\vec{e}_z$.

Un jet *moléculaire* effusif est généré à partir d'une enceinte contenant CH_3F gazeux, à température T, munie d'un orifice de sortie. Le jet est collimaté par un diaphragme de petit diamètre donnant pour direction moyenne du jet celle de l'axe central Oz de l'hexapôle.

5. Montrer que l'hexapôle permet de refocaliser les molécules, en opérant une sélection selon le moment dipolaire. Préciser la distance de première refocalisation.

6. Dans un tel jet, la distribution des vitesses est donnée par l'expression $dN(v) = Av^3 \exp(-mv^2/2k_BT)dv$, où $dN(v)$ est le nombre de molécules qui ont le module de leur vitesse entre v et $v + dv$ et A un facteur ne dépendant que de la température.
Établir l'expression de la vitesse la plus probable du jet. La comparer à la vitesse quadratique moyenne dans l'enceinte.

7. *Application numérique.* On donne $R = 2,5$ cm, $a = 2,5$ mm, $V_0 = 50$ kV et $T = 140$ K. On analyse le mouvement des molécules CH_3F ayant un moment dipolaire $|d_{\text{eff}}| = 3 \times 10^{-30}$ C $\cdot$ m.

a) Calculer f_0

b) Calculer la position du premier point $P(0,0,1)$ où les molécules, ayant la vitesse la plus probable du jet, sont refocalisées sur l'axe Oz.