

PARTIE III : X MP 2011 Composition Physique-SI (Extrait)

Les 3 parties de ce problème sont totalement indépendantes

III Horloge à quartz

Lorsqu'il est placé dans un champ électrique, un cristal de quartz convenablement taillé se déforme ; réciproquement, si un cristal de quartz est soumis à des efforts mécaniques, une différence de potentiel apparaît entre deux de ses faces. Ce couplage électromécanique, dit *piézoélectrique*, est à la base des horloges à quartz.

Dans le cadre d'une application horlogère, l'application d'une tension variable aux bornes du composant va provoquer une vibration mécanique qui va conduire à l'apparition de charges et donc d'un courant. À une résonance mécanique du système est ainsi associée une résonance d'intensité. Un diviseur de fréquence permet enfin d'obtenir la fréquence de base de 1 Hz.

Un circuit électrique équivalent au cristal de quartz est représenté figure 7. Le condensateur C_0 est la capacité du composant et les éléments C_1, L_1 et R_1 sont la représentation sous forme d'une impédance électrique des effets piézoélectriques associés à la vibration du quartz. Les éléments et leurs valeurs sont notés de la même manière, par exemple, la valeur de la capacité du condensateur C_0 est notée elle aussi C_0 . On pose $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ et $Q = \frac{L_1 \omega_s}{R_1}$.

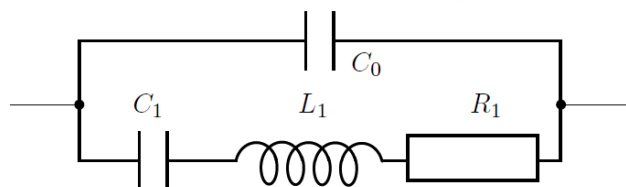


Figure 7 : Schéma électrique équivalent d'un oscillateur à quartz.

11. Adoptant les valeurs $C_1 = 3,00 \times 10^{-15}$ F, $L_1 = 7,86 \times 10^3$ H, $R_1 = 32 \times 10^3 \Omega$ et $C_0 = 1,50 \times 10^{-12}$ F. Calculer $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, $\omega_p = \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}} \omega_s$ et les fréquences associées f_s et f_p ; calculer $Q = \frac{L_1 \omega_s}{R_1}$. On prendra garde au nombre de chiffres significatifs proposés.

12. Dans cette question seulement, la résistance R_1 est nulle ; l'impédance complexe du circuit se met alors sous la forme $Z = \frac{1}{jC_0 \omega_s x} \frac{1-x^2}{a^2-x^2}$, où $x = \frac{\omega}{\omega_s}$ et $a = \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}$; tracer l'allure de la réactance $X(x) = \text{Im} [Z(x)]$. Dans quels domaines de fréquences le quartz, dans ce modèle, se comporte-t-il comme un condensateur ? Comme une inductance ?

13. Au début des calculs conduisant à l'impédance complexe de la question 12, l'on opère formellement la substitution $L_1 \rightarrow L_1 + \frac{R_1}{j\omega}$. Quel circuit électrique décrit-on ainsi ?

14. Identifier et commenter les courbes de la figure 8, qui représentent les composantes de l'impédance complexe au voisinage de la pulsation de résonance parallèle ω_p . On admettra

$$Z(\omega_p) \approx \frac{C_1}{C_0} \frac{Q}{(C_1 + C_0)\omega_s} \approx \frac{R_1}{(R_1 C_0 \omega_s)^2}$$

$$Z(\omega_s) = \frac{R_1}{1 + \frac{j}{Q} \frac{C_0}{C_1}}$$

On vérifiera la cohérence des résultats avec la question 12 en comparant les courbes de réactances.

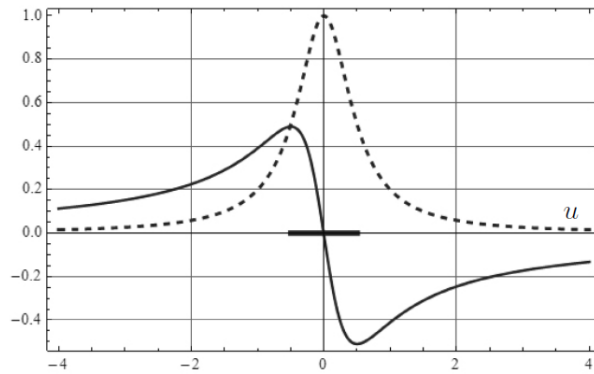


Figure 8 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance électrique du quartz au voisinage de la résonance parallèle. Les ordonnées sont normalisées au maximum de la courbe en pointillés, soit à $3,27 \times 10^8 \Omega = 327 \text{ M}\Omega$; en abscisse, $u = Q \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_p}{\omega_s} \right) = Q(x - a)$. La longueur réelle du trait épais sur l'axe des abscisses est $\frac{1}{Q}$.

15. La figure 9 représente $\log \left| \frac{Z(x)}{Z(a)} \right|$ en fonction de $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$.

Commenter l'allure de cette courbe (notamment à la lumière des questions précédentes). Pourquoi travaille-t-on en pratique à la fréquence f_s ? Sachant que l'on veut que la montre batte la seconde, justifier le choix de la valeur numérique 32 768 Hz pour f_s .

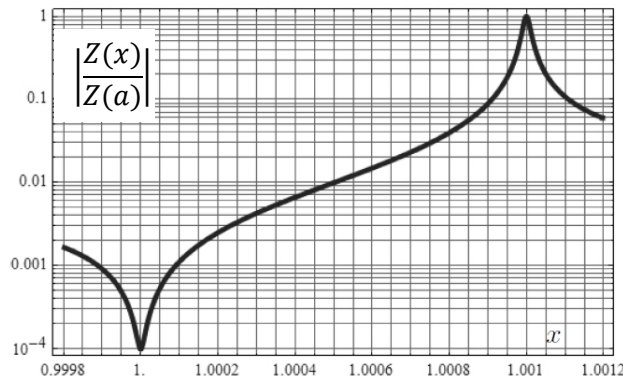


Figure 9 : Module de l'impédance équivalente du cristal de quartz utilisé.

16. Au voisinage de la température $T_0 = 300 \text{ K}$, la fréquence de résonance du quartz utilisé, notée f_0 , varie en fonction de la température selon la loi $\frac{\Delta f_0}{f_0} = -4 \times 10^{-8} (T - T_0)^2$. Calculer la dérive d'une montre à quartz sur un an pour un écart $T - T_0$ de température constant, égal à 10°C . La montre avancera ou retardra-t-elle ?

IV Asservissement d'une horloge à quartz à un signal de référence

La stabilité à long terme d'une horloge portable à quartz en milieu non contrôlé est impossible à garantir. Il est alors nécessaire de recourir à sa synchronisation avec une horloge de référence.

L'utilisation conjointe d'un oscillateur à quartz ayant une excellente stabilité à court terme et d'un signal GPS qui possède une dérive de quelques $10^{-5} \text{ s} \cdot \text{an}^{-1}$ permet de réaliser un système peu coûteux, autonome, précis et stable à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase.

Une boucle à verrouillage de phase est un système bouclé dans lequel la grandeur asservie est la phase $\Phi(t)$ d'un signal de la forme $A(t) = A \cos[\Phi(t)]$. La pulsation instantanée de ce signal est définie par $\omega(t) = \frac{d\Phi}{dt}$. La boucle asservit la pulsation d'un oscillateur, ici l'oscillateur à quartz, sur celle d'un signal dit de référence, ici le signal GPS.

Les éléments de ce circuit sont, d'une part un comparateur de phase, constitué d'un multiplieur et d'un filtre passe-bas, d'autre part un oscillateur contrôlé en tension, ou OCT. Cet élément est un circuit dont la fréquence d'oscillation ω est commandée par une tension électrique $u(t)$; pour des signaux suffisamment petits, $\omega(t) = \omega_0 + K_0 u(t)$, avec $K_0 > 0$; la pulsation ω_0 est la pulsation dite libre de l'oscillateur.

En régime dit verrouillé, les fréquences des signaux appliqués sur les deux entrées du comparateur de phase sont identiques, les phases de ces deux signaux pouvant être différentes.

17. Pourquoi, si le but est d'obtenir des fréquences identiques, asservir une phase et non pas une fréquence ?

Le multiplieur représenté sur la figure 10 par le symbole \otimes , attaqué simultanément par la tension de référence $v_r(t) = V_r \cos(\omega_r t + \varphi_r)$ et par la tension issue de l'oscillateur à quartz $v_Q(t) = V_Q \cos[\omega_Q t + \varphi_Q(t)]$, donne en sortie le signal $v_1(t) = 2k v_r(t) v_Q(t)$, où k est une constante positive. L'asservissement est réalisé lorsque, simultanément, $\omega_Q = \omega_r$ et $\Delta\Phi = \varphi_r - \varphi_Q$ est constant. Après filtrage, seule subsiste la composante basse fréquence du produit, soit $u(t) = k V_r V_Q \cos[\varphi_r(t) - \varphi_Q(t)]$. C'est la tension de commande appliquée à l'OCT.

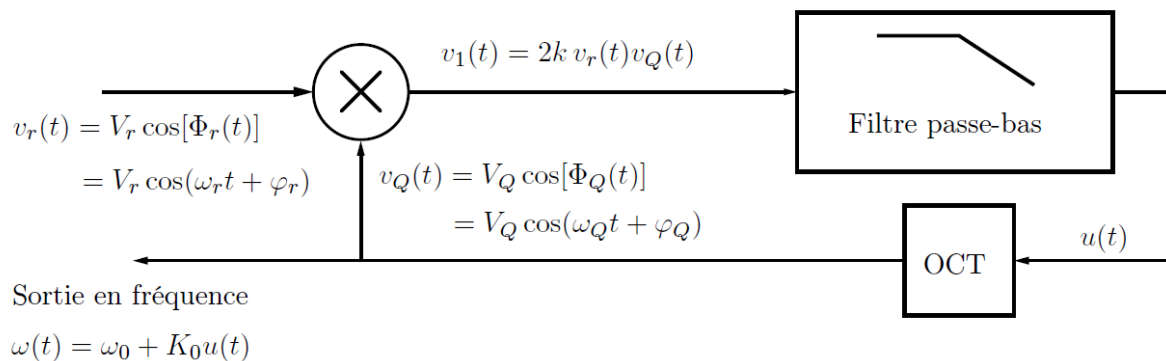


Figure 10 : Boucle à verrouillage de phase.

18. Exprimer la sensibilité $\sigma = \frac{\partial u}{\partial(\varphi_r - \varphi_Q)}$. En régime linéaire d'asservissement, $\omega_Q = \omega_r$, la valeur commune étant ω_0 ; justifier que le point d'accrochage est alors l'un des points A ou B de la figure 11 et identifier le point stable du fonctionnement.

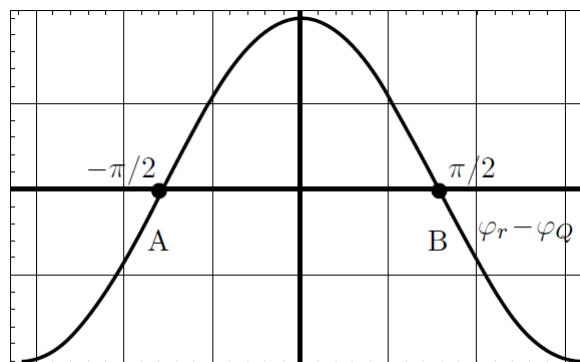


Figure 11 : Représentation de $\cos(\varphi_r - \varphi_Q)$.

On suppose à présent que la pulsation de référence n'est pas constante, mais qu'elle évolue lentement et l'on pose $\Delta(t) = \omega_r(t) - \omega_0 = \frac{d\Phi_r}{dt} - \omega_0$. La fonction de transfert du filtre est, en coordonnées de Laplace, $F(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$. On rappelle enfin les notations et les relations générales

$$\begin{aligned} v_r(t) &= V_r \cos[\Phi_r(t)] = V_r \cos[\omega_r t + \varphi_r] \\ v_Q(t) &= V_Q \cos[\Phi_Q(t)] = V_Q \cos[\omega_Q t + \varphi_Q] \\ \Phi_{\text{err}}(t) &= \Phi_r(t) - \Phi_Q(t) \\ u(t) &= kV_r V_Q \cos[\Phi_{\text{err}}(t)] \\ \omega_Q(t) &= \frac{d\Phi_Q}{dt} = \omega_0 + K_0 u(t) \quad \omega_r(t) = \frac{d\Phi_r}{dt} \end{aligned}$$

19. Que faut-il supposer sur la valeur de $\omega_r \tau$ pour justifier la relation approximative $u + \tau \frac{du}{dt} = kV_r V_Q \cos[\Phi_{\text{err}}(t)]$?

20. On pose $K = kK_0 V_r V_Q$. Établir l'équation différentielle

$$\tau \frac{d^2 \Phi_{\text{err}}}{dt^2} + \frac{d\Phi_{\text{err}}}{dt} + K \cos \Phi_{\text{err}} = \Delta(t) + \tau \frac{d\Delta}{dt}.$$

Plage de verrouillage, plage de capture

Pour faciliter le traitement des questions 21 et 22 on pourra, dans un premier temps, considérer que le filtre passe-bas est de gain unitaire pour les fréquences inférieures à une fréquence f_c et de gain nul pour les fréquences supérieures à f_c .

21. Que devient chacun des termes de l'équation donnée à la question **20** en situation de verrouillage? En admettant que, une fois verrouillée, la boucle peut suivre les variations lentes de la pulsation d'entrée, montrer que ce suivi ne peut se faire que dans une plage de pulsation, que l'on déterminera.

22. Pour $t < 0$, $v_r(t) = 0$, la tension au sortir du multiplieur est nulle et l'OCT oscille à sa fréquence libre ω_0 . Au temps $t = 0$, le signal $v_r(t) = V_r \cos[(\omega_0 + \delta)t]$ est appliqué à l'une des entrées du multiplieur. On suppose satisfaite l'inégalité $|\tau\delta| \ll 1$; on constate que la boucle se verrouille. Montrer que ce verrouillage peut s'effectuer sur une bande de pulsations que l'on caractérisera qualitativement.

V Oscillateur non linéaire entretenu ; modèle électrique du balancier

Le fonctionnement d'un oscillateur exige la mise en œuvre d'une source d'énergie qui, à chaque oscillation, compense les pertes.

La figure 14 illustre un principe de l'entretien électrique d'un résonateur : ce résonateur est associé à une conductance non linéaire dont la relation courant-tension est modélisée par la loi $i = -Gv + \beta v^3$, où G et β sont des constantes positives; on remarque que, lorsque la tension est suffisamment faible, la conductance est négative. Le but de cette partie est de montrer l'établissement d'un régime stable dans un tel système,

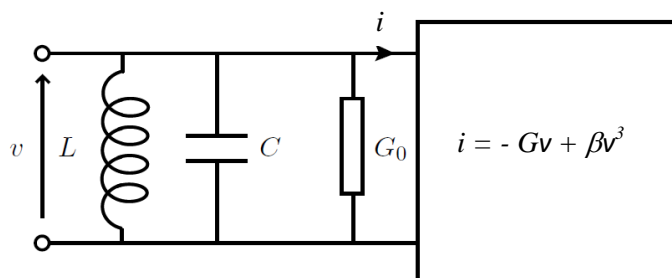


Figure 14 : Entretien d'un oscillateur par conductance négative et non linéarité.

32. Montrer que avec l'entrée en tension sinusoïdale $v = V \sin(\omega t)$, $i \approx \left(-G + \frac{3}{4}\beta V^2\right)v$; on rappelle l'identité $\sin(3u) = 3 \sin u - 4 \sin^3(u)$. Pourquoi est-il en général réaliste de négliger le terme à la pulsation 3ω ?

33. En effectuant l'analyse du système en régime sinusoïdal de pulsation ω , donner l'expression de son admittance complexe $Y = g_1 + jx_1$ en fonction de L, C, G_0, G, β et V . En déduire que, en régime d'oscillation entretenue, la pulsation et l'amplitude du régime sont fixées : $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $V = V_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{G - G_0}{\beta}} = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{g}{\beta}}$ (ce qui définit $g = G - G_0$).

L'expression de V_0 impose $G > G_0$; justifier physiquement cette inégalité.

34. Expliquer pourquoi, en régime de petits signaux, l'oscillateur démarre.

35. Pour l'analyse du régime transitoire, on pose $v(t) = V(t) \sin(\omega_0 t)$ où l'amplitude $V(t)$, que l'on supposera toujours positive, varie très lentement par rapport à $\sin(\omega_0 t)$.

Admettant les relations caractérisant le facteur de qualité $Q = \frac{1}{|g_1|} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{4C\omega_0}{3\beta(V_0^2 - V^2)}$

établir l'équation différentielle suivante que l'on ne cherchera pas à démontrer : $\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{3}{8} \frac{\beta}{C} (V_0^2 - V^2)$.

36. On note V_1 la valeur initiale de $V(t)$. Quel est le signe de $\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=0}$? Montrer, sans intégrer l'équation différentielle établie à la question **35**, que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_0$.

FIN DE CETTE PARTIE

FIN DU DS