

Le sujet est constitué de 4 extraits de concours, rédigés sur des feuilles séparées svp.

ACCUMULATEUR Li/ion (Centrale PSI 2015 – extrait)

Constante d'Avogadro

$$N_a = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Masse molaire du lithium

$$M(\text{Li}) = 6,94 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Masse molaire du carbone

$$M(\text{C}) = 12,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} ; \quad \mu(\text{Ni}) = 8900 \text{ kg/m}^3$$

Charge électrique d'un électron

$$q_e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C} ; \quad \mu(\text{Pb}) = 11350 \text{ kg/m}^3$$

On rappelle que le lithium appartient à la première ligne et à la première colonne de la classification périodique ; sa configuration électronique est $1s^2 2s^1$.

II.A.4) Comment l'électronégativité des éléments évolue-t-elle si l'on se déplace dans la classification périodique de la gauche vers la droite ? Que peut-on en déduire concernant l'électronégativité du lithium ?

II.A.5) Justifier le caractère réducteur du lithium. Quel ion le lithium peut-il former ?

II.A.6) À température ambiante, le lithium possède une structure cubique centrée. Sa maille élémentaire est cubique, les atomes occupant les sommets du cube et le centre du cube. On caractérise cet arrangement par le côté du cube élémentaire, nommé paramètre de maille, noté a . Déterminer le nombre d'atomes par maille et la compacité de cette structure.

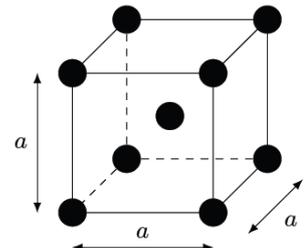


Figure 3

II.A.7) Le paramètre de maille vaut $a = 0,35 \text{ nm}$. Déterminer la masse volumique du lithium.

II.A.8) D'après les résultats précédents, citer deux qualités importantes d'un accumulateur au lithium.

II.B – Accumulateur Li-ion

Un accumulateur lithium-ion fonctionne par l'échange réversible d'ions lithium entre une électrode négative et une électrode positive.

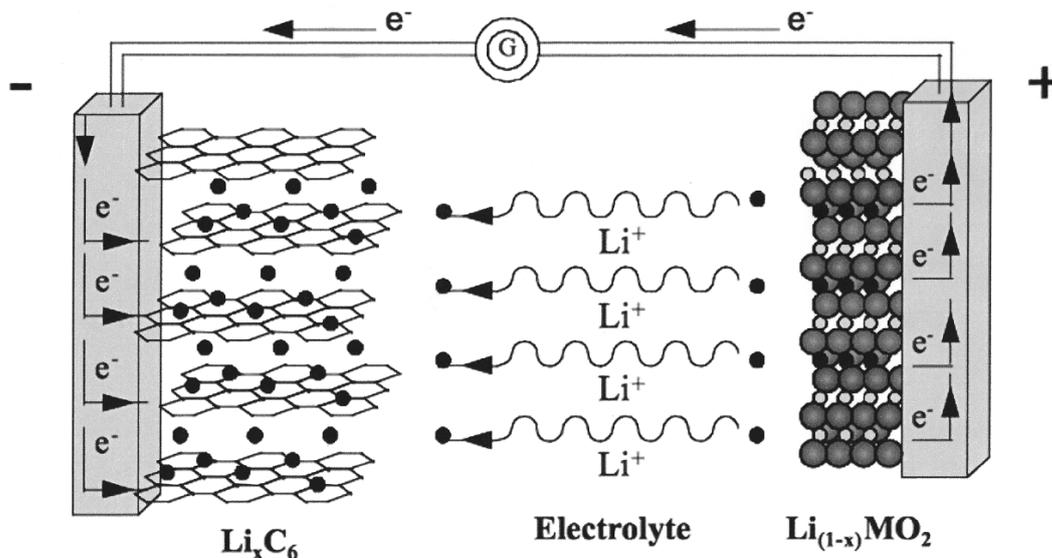


Figure 4 Schéma de fonctionnement du générateur lithium-ion représenté lors de sa charge⁴

II.B.1) L'électrode négative

L'utilisation d'une électrode en lithium pour constituer l'électrode négative d'un accumulateur pose de nombreux problèmes, c'est la raison pour laquelle on a choisi d'utiliser le lithium en insertion dans une structure hôte. Les atomes de lithium sont insérés dans une structure carbonée, par exemple du graphite, on parle d'électrode au graphite lithié. Lors de la charge, la réaction électrochimique qui se produit est la réduction des ions lithium qui s'accompagne de l'insertion des atomes de lithium dans le graphite. Lors de la décharge, les atomes de lithium sont oxydés et les ions lithium se désinsèrent.

a) La formule chimique du composé d'insertion est Li_xC_6 , x variant de zéro dans l'état déchargé à un dans l'état chargé.

- Rappeler la demi-équation de réduction des ions Li^+ .
- Écrire la réaction d'insertion des atomes de lithium dans le graphite.
- Les deux réactions se produisent simultanément, écrire la demi-équation bilan traduisant ces phénomènes pendant la charge.

- b) On souhaite déterminer la quantité maximale d'électricité que peut stocker cette électrode.
- Déterminer le nombre maximum N_{\max} d'atomes de lithium qui peuvent être insérés dans 1 g de graphite.
 - Lors de la décharge, chaque atome de lithium peut libérer un électron. Déterminer la charge électrique maximale q_{\max} que peut délivrer l'électrode de graphite lithié par gramme de graphite, en $C \cdot g^{-1}$ puis en $mA \cdot h \cdot g^{-1}$.

II.B.2) L'électrode positive

L'électrode positive est constituée d'un cristal d'oxyde de cobalt (CoO_2) dans lequel des ions lithium s'insèrent pour former un cristal d'oxyde de cobalt lithié ($LiCoO_2$). Lors de la charge, le cobalt s'oxyde pendant que les ions lithium se désinsèrent. Pendant la décharge, le cobalt est réduit pendant que les ions lithium s'insèrent.

a) En considérant que le nombre d'oxydation de l'oxygène dans CoO_2 et dans $LiCoO_2$ vaut $-II$ et que celui du lithium dans $LiCoO_2$ est $+I$, déterminer le nombre d'oxydation du cobalt dans CoO_2 et dans $LiCoO_2$. Identifier l'oxydant et le réducteur dans le couple $CoO_2 / LiCoO_2$.

b) Écrire la demi-équation qui se produit à cette électrode lors de la charge en tenant compte de l'insertion des ions lithium.

II.B.3) Écrire l'équation bilan du fonctionnement de l'accumulateur lors de la charge et lors de la décharge.

II.B.4) Le document de présentation de l'Hyperloop indique que la batterie lithium-ion utilisée devra fournir une puissance de 328 kW au compresseur pendant une durée de 45 minutes. La masse totale de cette batterie est de 1500 kg.

a) Déterminer l'énergie nécessaire au fonctionnement du compresseur pendant le trajet (en joule) puis convertir cette énergie en watt heure.

b) Déterminer la puissance massique que doit pouvoir fournir la batterie prévue, c'est-à-dire la puissance fournie par kg de batterie.

c) Déterminer l'énergie massique que doit pouvoir emmagasiner la batterie.

d) La **figure 5** présente les puissances et énergies massiques accessibles en fonction des différentes technologies d'accumulateurs.

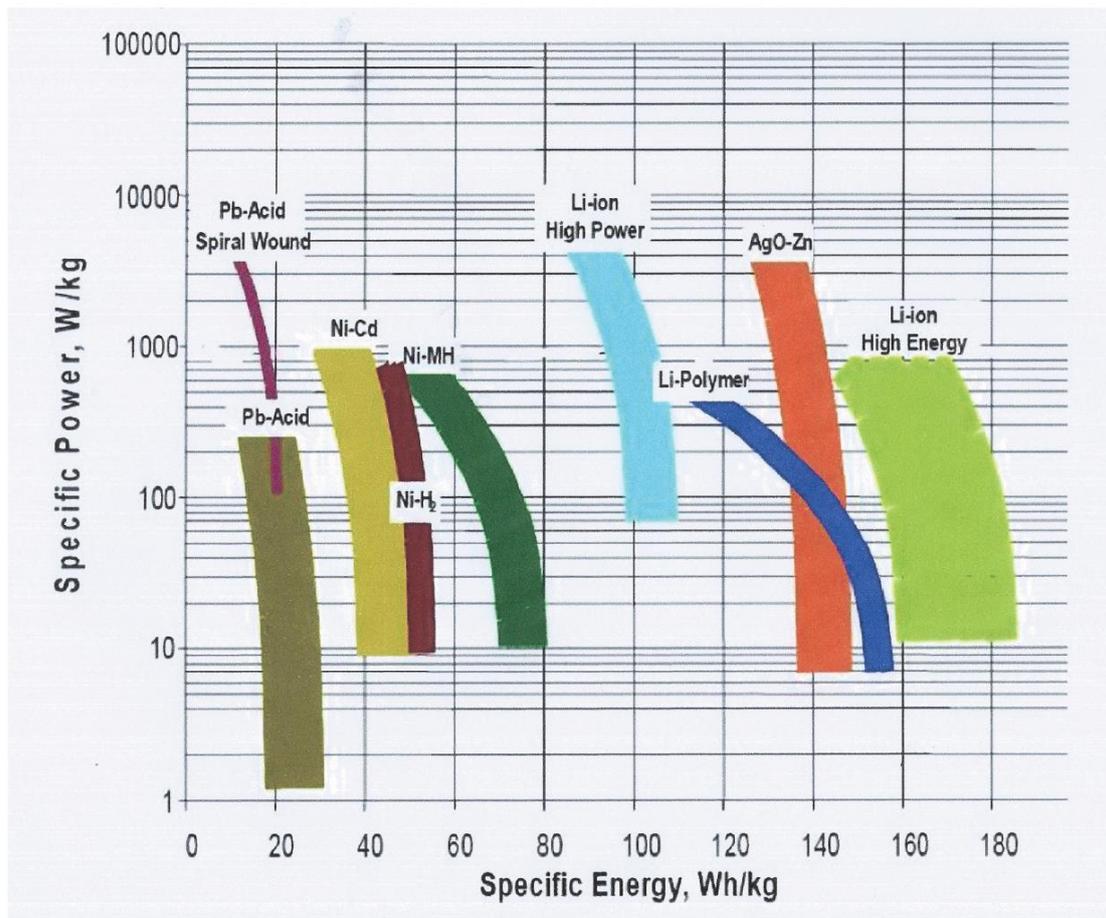
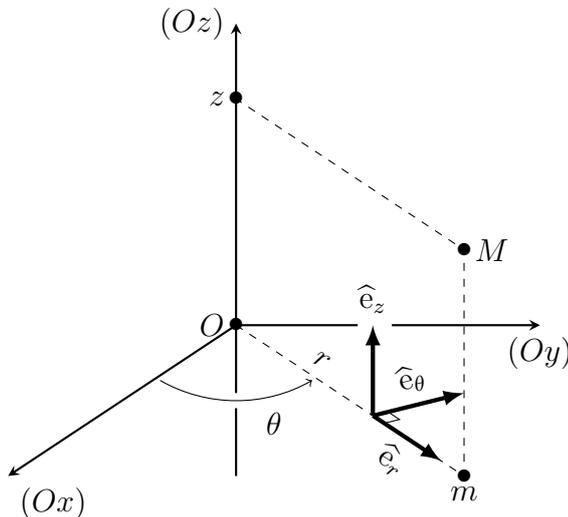


Figure 5 Puissance massique en fonction de l'énergie massique pour différentes technologies d'accumulateurs⁵

Existe-t-il une technologie d'accumulateur compatible avec les indications données par le document de présentation. Si oui, laquelle ?

Physique en géométrie cylindrique

Ce sujet est consacré à l'étude de divers phénomènes physiques décrits dans le système de coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) (r, θ, z) du point M rappelé sur la figure 1 ; m est le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy) . On rappelle aussi, dans ce système de coordonnées, les expressions de plusieurs opérateurs de l'analyse vectorielle. Les vecteurs sont surmontés d'une flèche (\vec{a}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors repérés par un chapeau (\hat{e}_x).



$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \hat{e}_r + \dots$$

$$\dots + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_z$$

FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques d'axe (Oz) .

Les parties **I**, **II** et **III** sont totalement indépendantes. La partie **I** établit le lien entre la viscosité du sang s'écoulant dans les vaisseaux capillaires (cylindriques) et la puissance de la pompe formée par le cœur humain. La partie **II** décrit quelques propriétés du tube (cylindrique) des magnétrons, utilisés notamment comme émetteurs d'ondes électromagnétiques dans les fours à micro-ondes. Enfin, la partie **III** étudie la possibilité de la lévitation magnétique d'une bobine d'induction enroulée autour d'un cylindre formé d'un matériau magnétisable linéaire.

Pour toutes les applications numériques on pourra se contenter d'un seul chiffre significatif.

I La circulation capillaire

En 1844, le physicien et médecin français Poiseuille débute son mémoire nommé « le Mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres » par la phrase suivante : *Les physiologistes et les pathologistes se sont beaucoup occupés à rechercher les causes pour lesquelles tel viscère recevait plus de sang que tel autre.*

Il poursuit en indiquant que les causes essentielles en sont *l'étendue et le diamètre des petits vaisseaux qui composent le système capillaire et la pression du sang, déterminée par l'action du cœur.* Dans ce qui suit, le sang sera décrit comme un fluide en écoulement incompressible de masse volumique $\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\eta = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Il s'écoule en régime stationnaire le long des vaisseaux capillaires, tubes cylindriques de rayon R variant de 3 à 15 μm de diamètre. On s'intéressera ici à un *capillaire typique*, de rayon $R = 10 \mu\text{m}$.

- – 1. Rappeler l'expression et la signification physique du *nombre de Reynolds* \mathcal{R}_e d'un écoulement.

La physiologie humaine adulte est caractérisée par un volume sanguin total de l'ordre de 5 à 6 litres, une longueur totale du système capillaire de l'ordre de 100 000 km. Le *volume systolique* (la quantité de sang éjectée par chaque contraction du cœur) est d'environ 100 mL ; la fréquence cardiaque de repos d'un adulte sera prise à 60 battements par minute. Enfin, la section cumulative (somme de toutes les sections) de tous les capillaires est d'environ $\sigma = 0,5 \text{ m}^2$.

- – 2. Estimer la longueur moyenne d'un vaisseau capillaire typique.
- – 3. Estimer le débit massique moyen D_m du sang dans un capillaire typique, puis le nombre de Reynolds \mathcal{R}_e associé. Conclure.

Un capillaire typique est un tube cylindrique rigide, d'axe (Oz) , de rayon $R = 10 \mu\text{m}$ et de longueur $\ell = 5 \text{ cm}$, parcouru par le fluide en écoulement incompressible et visqueux qui modélise le sang. On *admet* que la vitesse du sang ne dépend que de la distance r à l'axe et de la distance z parcourue depuis l'entrée dans le capillaire ; on l'écrit $\vec{v} = v(r,z)\hat{e}_z$. On néglige les effets de la pesanteur et la pression du sang dans le tube capillaire ne dépend que de z .

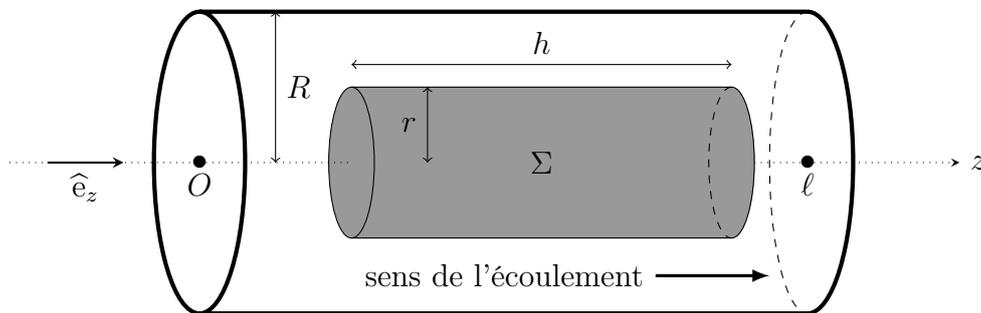
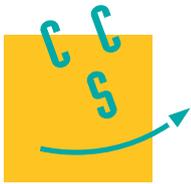


FIGURE 2 – Capillaire et élément de fluide étudié.

On étudie (cf. figure 2) l'écoulement du fluide situé à une distance au plus égale à r de l'axe du capillaire, sur une longueur arbitraire $h < \ell$.

- – 4. Montrer que le caractère incompressible de l'écoulement assure que cet élément de fluide n'est pas accéléré.
- – 5. En déduire l'existence d'un gradient de pression $\frac{dP}{dz}$ constant dont on précisera l'expression en fonction, notamment, du terme de viscosité $\eta \frac{\partial v}{\partial r}$.
- – 6. Exprimer complètement $v(r,z)$ en fonction de R , η et $\frac{dP}{dz}$.
- – 7. En déduire la *résistance linéique d'écoulement* R_u , définie par la relation $\left| \frac{dP}{dz} \right| = R_u D_m$.
- – 8. Calculer numériquement l'écart de pression ΔP de part et d'autre du capillaire en précisant en quel point la pression est la plus élevée.
- – 9. Exprimer la puissance des forces de pression exercées sur le fluide traversant le capillaire en fonction de ΔP , D_m et ρ puis en fonction de R_u , ρ , D_m et ℓ .
- – 10. Que peut-on en déduire concernant la puissance totale moyenne du cœur humain ? On attend ici une réponse numérique.



Sécurité d'une plongée à très grande profondeur : exemple de l'expédition Deepsea Challenger

Ce sujet porte sur l'exploration des très grandes profondeurs à l'aide de sous-marins autonomes et s'attache à discuter des contraintes de sécurité liées à ces expéditions.

Il reprend en particulier les données disponibles sur l'expédition menée par le réalisateur James Cameron dans la fosse des Mariannes, fosse océanique la plus profonde connue à ce jour, et son sous-marin nommé Deepsea Challenger.

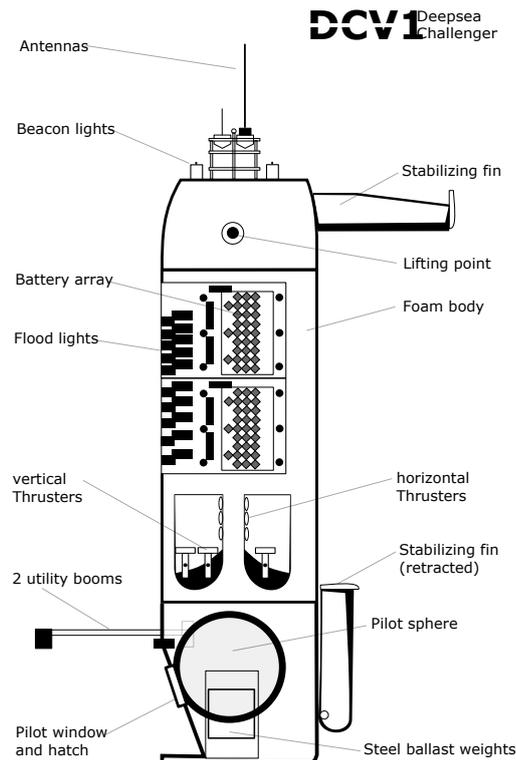
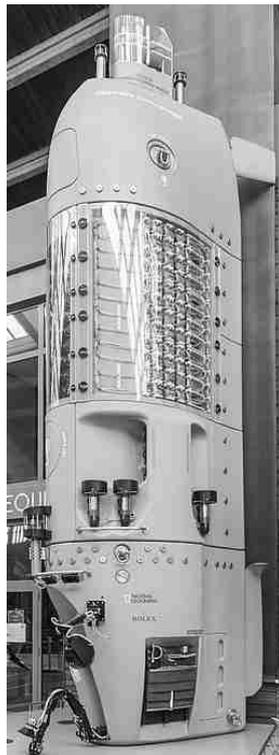


Figure 1 Le sous-marin Deepsea Challenger (Wikimedia)

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Certaines données numériques et un formulaire sont regroupés en fin d'énoncé ; d'autres données relèvent de l'initiative du candidat.

I Pression et plongée

I.A – Pression hydrostatique

La contrainte principale à laquelle est soumis un sous-marin est celle liée à la pression exercée par le fluide environnant sur la structure de l'habitacle. L'évaluation des pressions rencontrées au fond de l'océan est donc cruciale pour déterminer les efforts que devront reprendre les parois qui protègent le pilote.

On se place dans un repère cartésien de centre O , placé sur l'interface eau-air, et d'axe Oz descendant.

Q 1. On suppose que le champ de pression P du fluide vérifie la relation $\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$ (la démonstration de cette relation n'est pas attendue). Proposer une interprétation physique de celle-ci et indiquer la signification de chacun des termes.

On suppose, dans un premier temps, que l'eau de mer est un fluide incompressible de masse volumique $\rho_0 = \rho(z = 0)$.

Q 2. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ à une profondeur donnée z , en fonction de P_0 la pression atmosphérique, g l'intensité de pesanteur uniforme qui règne dans l'océan, ρ_0 et z .

Lorsqu'on approche des profondeurs atteintes par James Cameron, le modèle du fluide incompressible peut éventuellement être remis en cause. On conserve l'hypothèse isotherme, mais on cherche à modéliser les variations de la masse volumique en introduisant le coefficient de compressibilité isotherme de l'eau par

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T.$$

On considère désormais que l'océan est isotherme, mais que la masse volumique ρ est variable.

Q 3. Montrer que

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T.$$

Q 4. On suppose que la grandeur χ_T est une constante. En utilisant la relation de la statique des fluides, montrer que la masse volumique varie avec la profondeur selon

$$\rho(z) = \frac{\rho_0}{1 - \rho_0 \chi_T g z}.$$

Q 5. En déduire que l'on a

$$P(z) = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g z).$$

Q 6. La pression dans la fosse des Mariannes (profondeur $z_{\max} = 10,9$ km) a été mesurée à $1,13 \times 10^8$ Pa. Le modèle prenant en compte la compressibilité de l'eau est-il suffisant pour prédire la pression à de telles profondeurs ? Proposer une amélioration de ce modèle.

Pour résister à une telle pression, il faut renforcer toutes les structures porteuses et notamment équiper la zone habitable sphérique de parois d'une épaisseur de plus de 5 cm d'acier. Le surpoids lié à cette structure est contrebalancé par un ensemble de plaques de mousse spécialement développées qui assure la flottabilité du sous-marin.

I.B – Plongée et remontée

L'économie d'énergie est également critique. La plongée au fond de la fosse, ainsi que la remontée en surface, sont essentiellement assurées par les forces gravitaires. C'est donc un ensemble de masses attachées à la coque du sous-marin, appelées *ballast* qui permettent la plongée. Leur abandon au fond de la fosse en fin d'expédition déclenche la remontée du sous-marin. Ainsi, l'usage des propulseurs, alimentés par un circuit électrique, peut être réservé à l'exploration locale de la fosse.

Le déplacement d'un solide dans un fluide visqueux s'accompagne généralement d'une force dite de traînée qui dépend notamment de la forme du solide et du régime d'écoulement. La norme de cette force, opposée au mouvement, peut s'écrire sous la forme

$$F = C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S \quad \text{On justifiera l'utilisation de cette expression}$$

où v est la vitesse du solide, S sa surface frontale, ρ la masse volumique du fluide et C_x un coefficient empirique sans dimension. La figure 2 donne la valeur du coefficient C_x pour diverses formes géométriques.

Les relevés effectués lors de la première expédition montrent que la descente du sous-marin, à vitesse quasi constante, a duré environ 2 h 30 min et a permis d'atteindre une profondeur de 10,9 km. Le même trajet n'a pris que 70 min lors du retour à la surface.

Q 7. En explicitant clairement votre démarche ainsi que les hypothèses que vous serez amené à formuler, évaluer la masse de ballast qui a été libéré pour permettre la remontée du sous-marin.

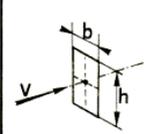
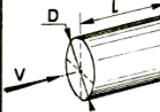
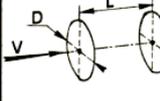
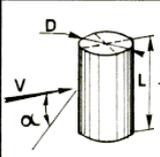
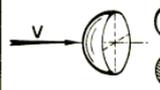
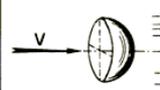
Fig. 19	Géométries	C _{xp}								
a	 $\frac{h}{b} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 10 \\ 18 \\ \infty \end{cases}$	$\begin{matrix} 1,10 \\ 1,15 \\ 1,19 \\ 1,29 \\ 1,40 \\ 2,01 \end{matrix}$								
b		1,11								
c	 $\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,91 \\ 0,85 \\ 0,87 \\ 0,99 \end{matrix}$								
d	 $\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 1,5 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,93 \\ 0,78 \\ 1,04 \\ 1,52 \end{matrix}$								
e	 $\frac{L}{D} = \begin{cases} 1 \\ 2 \text{ Re} \sim 9 \cdot 10^4 \\ 5 \text{ (sous-critique)} \\ 10 \\ 40 \\ \infty \text{ Re} \sim 5 \cdot 10^5 \end{cases}$	$\begin{matrix} 0,63 \\ 0,68 \\ 0,74 \\ 0,82 \\ 0,98 \\ 1,02 \\ 0,35 \end{matrix}$								
Coef. de correction de l'obliquité $C_{xp_\alpha} = k \cdot C_{xp_0}$		<table border="1"> <tr> <th>k pour α</th> <th></th> </tr> <tr> <td>1,0</td> <td>0°</td> </tr> <tr> <td>0,7</td> <td>30°</td> </tr> <tr> <td>0,2</td> <td>60°</td> </tr> </table>	k pour α		1,0	0°	0,7	30°	0,2	60°
k pour α										
1,0	0°									
0,7	30°									
0,2	60°									
f		$\begin{matrix} 0,34 \\ 0,40 \end{matrix}$								
g		$\begin{matrix} 1,33 \\ 1,17 \end{matrix}$								

Figure 2 Extrait de *L'Aérodynamique et l'origine des traînées parasites*, Ewald HUN-SINGER, Michaël OFFERLIN, Inter.action, 1997

De la physique dans le tunnel de Fréjus

Ce sujet comporte deux parties indépendantes qui s'intéressent à divers aspects de la physique dans le tunnel de Fréjus. A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z . Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple \vec{j} pour un flux surfacique ; sauf s'ils sont unitaires et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple \hat{e}_z tel que $\|\hat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques on utilisera 3 chiffres significatifs.

I. — Température dans le tunnel de Fréjus

Le tunnel routier du Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes cottiennes. La pointe Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

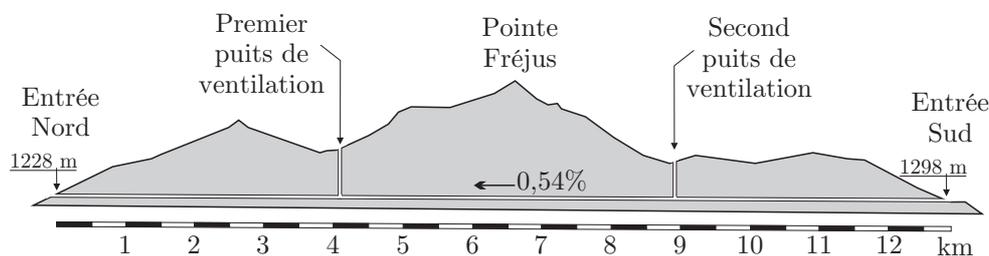


FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30°C . Dans un premier temps nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

on rappelle que la relation de dispersion est la relation liant ω et k pour que la fonction proposée soit solution de l'équation étudiée. (cf Q.8)

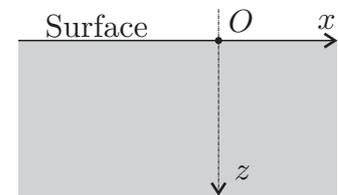


FIGURE 2 – Sol

I.A. — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 m. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s . Sa surface est plane et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure $T(z = 0, t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$ avec $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$. (Voir figure 2).

- 1 — Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.
- 2 — Le flux thermique élémentaire, défini comme la quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt , est noté $d\phi_Q$. Rappeler la définition du vecteur \vec{j}_Q , densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?
- 3 — Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ .
- 4 — On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + dz$ de surface \mathcal{S} . Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + dt$?

❑ 5 — Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

❑ 6 — Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\frac{\partial j_Q}{\partial z}$ et \mathcal{S} puis en fonction de ρ_s , c_s , \mathcal{S} et $\frac{\partial T}{\partial t}$.

❑ 7 — En déduire l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$ dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme $\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0 e^{i(\omega t - \underline{k}z)}$ vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0 \cos(\omega t)$.

❑ 8 — Interpréter cette forme de solution. Déterminer la relation de dispersion correspondante. En déduire l'expression de \underline{k} qu'on mettra sous la forme $\underline{k} = k' + ik''$ avec $k' > 0$. Quelle est la signification physique de k' et k'' . Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t)$.

❑ 9 — Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1%. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2,65 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c_s = 8,50 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\kappa = 3,00 \text{ SI}$.

❑ 10 — Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

I.B. — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30° C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45,0 \text{ km}$. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.

Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ avec $H = 10,0 \text{ km}$. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2,50 \mu\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m \hat{e}_z$ avec $j_m = 35,0 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$.

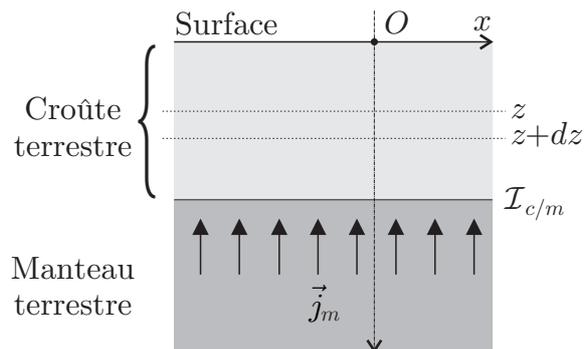


FIGURE 3 – Modèle géophysique

❑ 11 — Effectuer, en régime stationnaire, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface \mathcal{S} , comprise entre z et $z + dz$.

❑ 12 — En déduire la température $T(z)$ en fonction de : H , L_c , \mathcal{P} , j_m , κ et $\theta_0 = 0^\circ \text{ C}$ la température moyenne de surface en $z = 0$.

❑ 13 — Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S \hat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

❑ 14 — Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1,70 \text{ km}$) puis j_S .

Commenter le signe de cette dernière grandeur.

I.C. — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation $T(x, z = 0) = T_s + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus on prendra $\lambda = 10,0$ km.

□ **15** — On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation différentielle satisfaite par $T(x, z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x, z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z = 0)$ et qui demeure finie lorsque $z \rightarrow +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.

□ **16** — Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x, z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

□ **17** — On considère ici que la topographie de la surface peut être représentée par l'équation $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$. La température de la surface $T_s = T(x, z = h)$ sera prise égale à celle de l'air ambiant et sera modélisée par $T_s = \theta_0 + \beta z$. En effectuant un développement limité en z à l'ordre 1, exprimer la température $T(x, z = 0)$ en fonction de h , $T(x, z = h)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$.

Déterminer $\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=0}$ en fonction notamment du flux d'énergie thermique à la surface j_S . En déduire que l'on peut écrire

$$T(x, z) = \theta_0 + c_1 z + c_2 (1 - e^{-z/H}) + c_3 h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) e^{-z/\delta}$$

où l'on précisera l'expression des constantes c_1 , c_2 , c_3 et δ en fonction des données du problème.

FIN DE LA PARTIE I